Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 5

(17) Beweisen Sie die folgenden (in der Vorlesung aufgetretenen) Aussagen:

- (a) Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und besitzt die Funktion $f(x, t)$ eine in D stetige partielle Ableitung f_x , so genügt f in D einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. x .
- (b) Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein endliches Intervall und $a > 0$. Dann definiert

$$\|y\| := \sup_{t \in I} |y(t)| e^{at}$$

eine Norm auf $C(I, \mathbb{R})$. Diese ist äquivalent zur Supremumsnorm $\|y\|_\infty$.

(3 Punkte)

(18) (Ein Fixpunktsatz):

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Für eine Funktion $f : X \rightarrow X$ bezeichnen wir mit f^n die n -fache Hintereinanderausführung von f . Zeigen Sie: Wenn es eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = c < 1$ und $d(f^n(x), f^n(y)) \leq q_n d(x, y)$ für alle n und alle $x, y \in X$, dann besitzt f genau einen Fixpunkt. Wie kann man die Voraussetzung noch abschwächen?

(3 Punkte)

(19) Eine stetige Funktion $M(x, y) \neq 0$ heißt integrierender Faktor für die Differentialgleichung $g(x, y)dx + h(x, y)dy = 0$, wenn

$$M(x, y)g(x, y)dx + M(x, y)h(x, y)dy = 0$$

exakt ist.

- (a) Zeigen Sie: Sind g, h, M stetig differenzierbar, dann erfüllt ein integrierender Faktor M die folgende partielle Differentialgleichung:

$$M_y g + M g_y = M_x h + M h_x$$

(b) Hängt außerdem M nur von x , aber nicht von y ab, dann hat M die Form:

$$M(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x \frac{g_y(s, y_0) - h_x(s, y_0)}{h(s, y_0)} ds \right)$$

Was muss hier noch beachtet werden?

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x \right) dx + (y + e^x) dy = 0$$

Hinweis: (b) ist hier anwendbar.

(4 Punkte)

(20) Wir betrachten das Räuber-Beute-Modell nach Lotka-Volterra, also das System

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad \dot{y} = -cy + dxy.$$

Studieren Sie die Behandlung im Buch von W. Walter.

- (a) Erstellen Sie eine Zeichnung des Richtungsfeldes und der Lösungskurven für den Parametersatz $(a, b, c, d) = (5, 2, 3, 1)$ im positiven Quadranten $(x, y > 0)$. Verwenden Sie, falls möglich, Mathematica oder Maple.
- (b) Diskutieren Sie, welchen Einfluss eine Änderung der Parameter auf die Lösungen besitzt. Diskutieren Sie insbesondere, was für $b \rightarrow 0^+$ und für $d \rightarrow 0^+$ passiert. Deuten Sie das Ergebnis.
- (c) Für eine Lösung $[x(t), y(t)]$ mit der Periode T betrachte man die Mittelwerte

$$x_m = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

Beweisen Sie: $x_m = \frac{c}{d}, \quad y_m = \frac{a}{b}$

(4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 15.05.2025, 12 Uhr, beim Tutor.