Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 6

(21) (Ein Approximationsproblem):

Betrachten Sie die Gleichung

$$e^{-x^2} = \sinh(x).$$

- (a) Gibt es eine Lösung? Falls ja, wieviele? Warum?
- (b) Formen Sie die Gleichung in eine Fixpunktgleichung um und bestimmen Sie den Fixpunkt iterativ, beginnend bei $x_0 = 0$.
- (c) Betrachten Sie das Intervall $[0, 1]$ und diskutieren Sie den Zusammenhang zum Banach'schen Fixpunktsatz.
- (d) Berechnen Sie die Nullstelle mit dem Newton-Verfahren.

(4 Punkte)

(22) Wir untersuchen die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{x} - 2t\dot{x} - 2x = 0$$

- (a) Machen Sie einen Potenzreihenansatz und bestimmen Sie auf diese Weise eine rekursive Formel für die Koeffizienten der Potenzreihe.
- (b) Welche bekannte Potenzreihe löst das Anfangswertproblem $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$?

(3 Punkte)

(23) Gegeben sei die Norm $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ auf $\mathbb{R}^n$. Für $B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ setzen wir

$$\|B\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|B\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$, dem Vektorraum der reellen $n \times n$ -Matrizen.

(b) $\|B\mathbf{x}\|_2 \leq \|B\| \|\mathbf{x}\|_2$ für alle $B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(c) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für alle $A, B \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$.

(d) Berechnen Sie: $\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|$

(4 Punkte)

(24) Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Exponentialfunktion für Matrizen ($B, C \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$):

(a) $\exp(B + C) = \exp(B) \exp(C)$, falls $BC = CB$.

(b) $\exp(CBC^{-1}) = C \exp(B) C^{-1}$, falls C invertierbar.

(c) $\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

(d) Berechnen Sie $\exp(B)$ explizit für folgende Matrizen:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die einfachste Lösung für das „Jordan-Kästchen“ besteht darin, es als eine Summe zweier kommutierender Matrizen zu schreiben und (a) anzuwenden.

(4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 22.05.2025, 12 Uhr, beim Tutor.