

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 7

(25) Beweisen Sie folgende Aussagen:

- (a) Für alle $A \in \text{Mat}(d, \mathbb{C})$ gilt $\det(e^A) = e^{\text{tr}(A)}$.
- (b) Ist $A \in \text{Mat}(d, \mathbb{R})$, so ist $\det(e^A) > 0$.
- (c) Ist $A \in \text{Mat}(d, \mathbb{R})$ schiefsymmetrisch, so ist e^A orthogonal.
- (d) Ist $A \in \text{Mat}(d, \mathbb{C})$ hermitesch, so ist e^{iA} unitär.
- (e) Ist $A \in \text{Mat}(d, \mathbb{C})$, so ist e^A ein Polynom in A vom Grad $< d$. Falls die Eigenwerte von A paarweise verschieden sind, ist der Grad $d - 1$.
Setzen Sie an: $e^A = \alpha_0 \mathbb{1} + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{d-1} A^{d-1}$ und berechnen Sie die Koeffizienten für den Fall, dass die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ von A paarweise verschieden sind.

Hinweis: Bei (e) hilft der spektrale Abbildungssatz. **(4 Punkte)**

(26) (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + 2ty(t), \\ \dot{y}(t) &= 2tx(t) - y(t).\end{aligned}$$

Bringen Sie die Lösung in eine möglichst einfache Form!

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + 2ty(t) + \cosh(t^2), \\ \dot{y}(t) &= 2tx(t) - y(t) + \sinh(t^2),\end{aligned}$$

mit $x(0) = 0, y(0) = 1$. **(4 Punkte)**

(27) Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$\frac{d^4x}{dt^4} - 5\frac{d^3x}{dt^3} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} - 8x = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

Hinweis: Zwei Nullstellen des charakteristischen Polynoms finden sich leicht ...

(b) Beweisen Sie mittels Wronski-Determinante, dass es keine anderen Lösungen gibt als die, welche Sie in (a) angegeben haben.

(3 Punkte)

(28) Welche Kurven sind im positiven Quadranten ($x, y > 0$) senkrecht zu allen Hyperbeln ($y = \frac{c}{x}$ mit $0 < c \in \mathbb{R}$)? Skizzieren Sie Ihre Lösung!

Hinweis: Beschreiben Sie die Hyperbeln in der Form $F(x, y) = c$ und bestimmen Sie eine Funktion $G(x, y)$, so dass $G(x, y) = \alpha$ die orthogonale Kurvenschar bestimmt. Was muss gelten, damit sich die Kurven an der Stelle (x, y) senkrecht schneiden? Wählen Sie einen naheliegenden Ansatz für G .

(3 Punkte)

Abgabe bis **Freitag, 30.05.2025**, 12 Uhr, beim Tutor.