Michael Baake
Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 28.05.2025

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 8

(29) Wir betrachten den elektrischen Schwingkreis (siehe Abb.) mit den Konstanten: Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C. Die angelegte Spannung $U(t)$ kann zeitabhängig sein. Für die Stromstärke $I(t)$ gilt die Differentialgleichung:

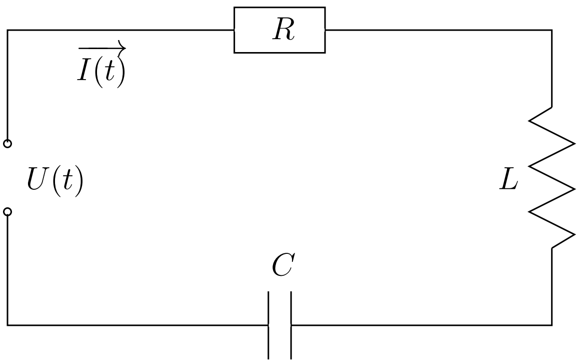
$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{U} \,.$$

(a) Lösen Sie die Differentialgleichung für $R = 0, U(t) = 0$ und $L, C > 0$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $U(t) = 0$ und $R, L, C > 0$. Welches Verhalten ergibt sich für $t \to \infty$?

(c) Wir legen eine Wechselspannung an: $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ (mit Konstanten ω, U_0). Weiter sei $R = 0$ und $L, C > 0$. Was geschieht jetzt? Besonders interessant ist der Fall $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$!

(4 Punkte)



(30) Vervollständigen Sie den Beweis der BCH-Formel aus der Vorlesung.

(3 Punkte)

(31) Wir betrachten $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$ fest und $t \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $A(t)$ nur für $a = 1$ eine kommutierende Matrixfamilie bildet, und bestimmen Sie das FUSY für $t_0 = 0$.

(b) Benutzen Sie nun die Peano–Baker-Reihe für den allgemeinen Fall und berechnen Sie das FUSY für $t_0 = 0$. Was passiert für $a \to 1$

(4 Punkte)

(32) Sei $I_n(t)$ der n-te Term der Peano–Baker-Reihe aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$I_n(t) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} : A(\tau_1) \cdot \ldots \cdot A(\tau_n) : d\tau_n \cdot \ldots \cdot d\tau_1 \,,$$

wobei der Integrand das zeitgeordnete Produkt bezeichnet, also

$$: A(\tau_1) \cdot \ldots \cdot A(\tau_n) := A(\tau_{\pi(1)}) \cdot \ldots \cdot A(\tau_{\pi(n)})$$

für eine Permutation $\pi \in S_n$ so dass $\tau_{\pi(1)} \geqslant \tau_{\pi(2)} \geqslant \cdots \geqslant \tau_{\pi(n)}$ gilt.

Hinweis: Ein Weg geht über eine geeignete Aufteilung von $[t_0, t]^n$.

(3 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 05.06.2025, 12 Uhr, beim Tutor.