Michael Baake
Neil Mañibo
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Bielefeld, 04.06.2025

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 9

(33) Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $\ddot{y} = a\,t\,y$ mittels Potenzreihenansatz. Vergleichen Sie dies mit der Lösung aus der Vorlesung über die Peano–Baker-Reihe für das äquivalente System 1. Ordnung.

(3 Punkte)

(34) Eine Markov-Matrix M heißt einbettbar, wenn $M = e^Q$ gilt für einen Markov-Generator Q. Beweisen Sie den Satz von Kendall:

$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in [0,1]$ ist genau dann einbettbar, wenn $\det(M) > 0$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie $\log(\mathbb{1} + A)$ mit $A = M - \mathbb{1}$.

(3 Punkte)

(35) Die partielle Differentialgleichung (mit $0 < \alpha = \text{const.}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

für eine Funktion $u(x,t)$ beschreibt Wärmeleitung und andere Diffusionsprozesse (dabei sind x Ort, t Zeit).

Zeigen Sie: Mit geeigneten Konstanten $A, B > 0$ ist

$$\frac{1}{A\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{B \cdot t}}$$

eine Lösung ($x \in \mathbb{R}, 0 < t \in \mathbb{R}$).
Interpretieren Sie diese Lösung. **(3 Punkte)**

(36) Als Ausgangspunkt betrachten wir einen Berg, der durch folgende Funktion modelliert werden soll:

$$U(x, y) := e^{\left((x-1)^2+(y-1/2)^2\right)} \tag{1}$$

Skizzieren Sie die durch

$$U(x, y) = const \tag{2}$$

gegebenen „Höhenlinien“. Geben Sie die zugehörige exakte Differentialgleichung an. Skizzieren Sie auch das Vektorfeld

$$f(x, y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}U(x, y), \frac{\partial}{\partial y}U(x, y)\right) , \tag{3}$$

das die Hangabtriebskraft an diesem Berg beschreibt. Zeigen Sie, dass die Hangabtriebskraft senkrecht zu den Höhenlinien verläuft und erläutern Sie, wie diese Orthogonalität mit der oben aufgestellten exakten Differentialgleichung zusammenhängt.

(3 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 12.06.2025, 12 Uhr, beim Tutor.