
Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 10

- (37) Sei u die 1-periodische Funktion, die auf $[0, 1)$ durch $u(x) = x(1 - x)$ definiert ist. Skizzieren Sie u und berechnen Sie die Fourierreihe für u . Was können Sie zur Konvergenz sagen?

(4 Punkte)

- (38) Sei P der Raum der (reellen) Polynome auf dem Intervall $[0, 2]$ vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p \mid q \rangle = \int_0^2 p(x)q(x)dx.$$

Berechnen Sie eine ON-Basis für P und bestimmen Sie das Polynom $p \in P$, welches die Bestapproximation für $f(x) = e^x$ liefert.

Illustrieren Sie das Resultat.

(4 Punkte)

- (39) Betrachten Sie das Randwertproblem

$$u'' - u' - 2u = 0, \text{ mit } u(0) + u'(0) = 1 \text{ und } u(1) = 0.$$

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der (homogenen) DGL.
- (b) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Lösung des RWP gibt und finden Sie diese Lösung.

(3 Punkte)

- (40) Es sei $J = [a, b]$ und seien $a_2(x) \in C^2(J)$, $a_1(x) \in C^1(J)$ und $a_0(x) \in C(J)$. Betrachte den Differentialausdruck

$$Au := a_2(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x)u.$$

Man nennt dann

$$A^*u := \frac{d^2}{dx^2}(a_2(x)u) - \frac{d}{dx}(a_1(x)u) + a_0(x)u$$

zu A *adjungiert*. A heißt *selbstadjungiert*, wenn A koeffizientenweise mit A^* übereinstimmt.

- (a) Zeigen Sie, dass A selbstadjungiert ist genau dann wenn $a_2'(x) = a_1(x)$ auf J ist.
- (b) Zeigen Sie, dass $Lu := (p(x)u')' + a_0(x)u$ selbstadjungiert ist.

(3 Punkte)

Abgabe bis **Freitag, 20.06.2025**, 12 Uhr, beim Tutor.