Michael Baake
Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2025
Bielefeld, 18.06.2025

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 11

(41) Betrachten Sie das Sturmsche Randwertproblem. Sei $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ein FUSY von $Lu = 0$. Setzen Sie voraus, dass das homogene RWP mit $R_1u_1 = 0$ und $R_2u_2 = 0$ nur die triviale Lösung besitzt. Zeigen Sie, dass die Greensche Funktion dieses RWP durch

$$\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{c}u_1(\xi)u_2(x), & \text{für } a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b \\ \frac{1}{c}u_2(\xi)u_1(x), & \text{für } a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b \end{cases}$$

gegeben ist, wobei $c = p(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x))$ konstant und nicht null ist.
(3 Punkte)

(42) (a) Berechnen Sie die Greensche Funktion für

$$u'' + u = 0, \text{ mit } u(0) = u'(\pi) = 0.$$

(b) Lösen Sie das halbhomogene RWP

$$u'' + u = x, \text{ mit } u(0) = 0, u'(\pi) = 0$$

mit Hilfe der Greenschen Funktion aus (a).

Hinweis: Bei (a) kann man mit einer geschickten Wahl von FUSY die Formel in Aufgabe (41) anweden.
(5 Punkte)

(43) Es sei $Y(x)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $L\boldsymbol{y} = 0$, mit $L\boldsymbol{y} := \boldsymbol{y}' - A(x)\boldsymbol{y}$ wobei $A(x)$ komplexwertig und stetig in J ist. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{z}(x) = \int_a^x Y(x)Y^{-1}(\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi$$

eine Lösung von $L\boldsymbol{z} = f(x)$ ist.
(2 Punkte)

(44) Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Es sei $Y(x)$ ein Fundamentalsystem der DGL $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, wobei $A(x)$ komplexwertig und in J stetig ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}, R\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{0}$.

(b) Für die Matrix $R(Y) = CY(a) + DY(b)$ gilt $\det(R(Y)) \neq 0$.

(c) Zu vorgegebenem $\boldsymbol{f} \in C(J), \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^n$ hat das halbhomogene RWP

$$L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f},\ R\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

genau eine Lösung.

(2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag 26.06.2025, 12 Uhr beim Tutor.