Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 12

- (45) (a) Finden Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$u'' - 2u' + u = e^x.$$

Hinweis: Um eine partikuläre Lösung zu finden kann man den Ansatz

$$u_p(x) = c(x)e^x$$

anwenden.

- (b) Lösen Sie das RWP

$$u'' - 2u' + u = e^x, \text{ mit } u(0) = 1 \text{ und } u(1) = \frac{5e}{2}.$$

(4 Punkte)

- (46) Betrachte das Eigenwertproblem

$$(xu')' + \frac{\lambda}{x}u = 0$$

mit $u'(1) = 0$ und $u'(e^{2\pi}) = 0$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen. Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert?

(4 Punkte)

- (47) Betrachten Sie die DGL

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - \nu^2)u = 0 \text{ für } x \in (0, \infty), \text{ mit } \nu = 1/2.$$

Sei u eine Lösung. Zeigen Sie, dass jede zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen in $(0, \infty)$ von u genau den Abstand π zueinander haben.

Hinweis: Man verwende hier die Transformation $u = \frac{v}{\sqrt{x}}$.

(3 Punkte)

- (48) Es sei $\phi(x, \lambda) = \arctan(u/pu')$ die Phasenfunktion bei der Prüfer-Transformation. Beweisen Sie die folgende Aussage: es gibt positive Konstanten δ und λ_0 mit

$$\phi(b, \lambda) \leq \delta\sqrt{\lambda}, \quad \text{für alle } \lambda \geq \lambda_0.$$

Hinweis: Hier nutzt man die Identität

$$\int_a^b \frac{\phi'}{A + \lambda B \sin^2 \phi} dx = \int_a^{\phi(b)} \frac{ds}{A + \lambda B \sin^2 s}$$

und die Tatsache, dass ϕ einer DGL erster Ordnung genügt.

(4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag 03.07.2025, 12 Uhr beim Tutor.