Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2025

Übungsblatt 13

(49) Lösen Sie das Eigenwertproblem

$$u'' + 4u' + u + \lambda u = 0, \text{ mit } u(0) = u(1) = 0.$$

(4 Punkte)

(50) Betrachten Sie die Besselsche DGL

$$x^2 u'' + x u' + (x^2 - \nu^2) u = 0 \text{ für } x \in (0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass diese DGL oszillatorisch ist für alle $\nu \in \mathbb{R}$.

(3 Punkte)

(51) (*Amplitudensatz*) Es sei J ein beliebiges Intervall und $p, q \in C^1(J)$ mit $p, q > 0$. Sei u eine nichttriviale Lösung von $Lu = (pu')' + qu = 0$ und seien $x_k < x_{k+1}$ zwei Extremstellen von u . Zeigen Sie, dass $|u(x_k)| \geq |u(x_{k+1})|$ (bzw. $|u(x_k)| \leq |u(x_{k+1})|$) gilt, falls $(pq)' \geq 0$ (bzw. $(pq)' \leq 0$).

Hinweis: Betrachte $f(x) = u^2 + \frac{1}{pq}(pu')^2$.

(3 Punkte)

(52) Betrachten Sie die DGL

$$u'' + \frac{\gamma}{x^2} u = 0,$$

wobei $\gamma \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser DGL.
- Für welche γ ist diese DGL oszillatorisch? Skizzieren Sie ein Beispiel $u_\gamma(x)$ der Lösung solcher DGL.

Hinweis: Substitution: $x = e^t$.

(4 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag 10.07.2025, 12 Uhr beim Tutor.