Lineare Operatoren in Hilberträumen

Sommersemester 2026

Universität Bielefeld
Neil Manibo
Tutor: Harsh Prasad

Überblick

Der Spielraum

Räume

$$\begin{tikzcd}
\underset{\text{topologische Räume}}{X} & \supset & \underset{\text{metrische Räume}}{(X,d)} & \supset & \underset{\text{normierter Räume}}{(X,\|\cdot\|)} \arrow[d, "+\ \text{Vollständigkeit}"] & \supset & \underset{\mathbb{K}\text{-VR mit Skalarprodukt}}{(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)} \arrow[d, "+\ \text{Vollständigkeit}"] \\
& & & & \underset{\text{Banachräume}}{(X,\|\cdot\|)} & \supset & \underset{\text{Hilberträume}}{(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)}
\end{tikzcd}$$

Lineare Operatoren

$T\colon X \to Y$ (X, Y normierte Räume)

- beschränkt
- halbbeschränkt
- abgeschlossen
- kompakt
- relativ kompakt

$T\colon X \to Y$ (X, Y (Prä)hilberträume)

- normal
- unitär
- hermitesch/symmetrisch
- selbstadjungiert/wesentlich selbstadjungiert

Notation

- Der Raum aller beschränkten Operatoren von X nach X: $B(X)$
- Definitionsbereich von T: $D(T) \subset X$
- Wertebereich von T: $R(T) \subset Y$

Bem.: Für $T \in B(X)$ gilt

T hermitesch $\iff$ T symmetrisch $\iff$ T selbstadjungiert $\iff$ T wesentlich selbstadjungiert

Beispiele:

- Laplace-Operator: Δ
- Multiplikationsoperator: $M_g \colon f \mapsto gf$
- Sturm–Liouville Operator:
$$\tau f = \frac{1}{r(x)}\left(-(p(x)f'(x))' + q(x)f(x)\right) \quad \text{in} \quad (a,b)$$
- Schrödingeroperator
- Diracoperator
$$\tau f = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j D_j f(x) + \beta f(x),$$
wobei
  - $\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}$, $\sigma_0 = \mathbb{I}_2$ und σ_j $(j = 1,2,3)$ die Paulischen Spin-Matrizen sind.
  - $D_j f := \frac{1}{i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \frac{\partial f_2}{\partial x_j}, \frac{\partial f_3}{\partial x_j}, \frac{\partial f_4}{\partial x_j}\right)$.
- Wellenoperatoren

(Achtung!: $R(T)$: Wertebereich vs $R(T,z) = (T-z)^{-1}$: Resolvente)

Spektrum eines (abgeschlossenen) Operators

$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ ist nicht bijektiv}\}$

1. $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{d}}(T) \sqcup \sigma_{\mathrm{e}}(T)$: *diskretes+wesentliches* Spektrum
2. $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{p}}(T) \sqcup \sigma_{\mathrm{c}}(T) \sqcup \sigma_{\mathrm{r}}(T)$: *Punkt-+kontinuierliches+residuales* Spektrum
3. $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{pp}}(T) \sqcup \sigma_{\mathrm{c}}(T)$: *reines Punkt- +kontinuierliches* Spektrum
4. $\sigma(T) = \sigma_{\mathrm{pp}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{ac}}(T) \cup \sigma_{\mathrm{sc}}(T)$:
reines Punktspektrum/absolutstetiges Spektrum/singulärstetiges Spektrum

Fragestellungen

(F1) Gibt es eine alternative Darstellung von T aus?

(F2) Setzen wir voraus, dass T die Eigenschaft $(*)$ besitzt.
Für welche W erfüllt $T + W$ auch der Eigenschaft $(*)$
(oder eine schwächere Version $(**)$)?

(F3) T hat $(\cdot)$-Spektrum $\sigma_{(\cdot)}(T)$. Wie sieht es $\sigma_{(\cdot)}(T+W)$ aus? Insbesonders wann gilt $\sigma_{(\cdot)}(T) = \sigma_{(\cdot)}(T+W)$?

(**F4**) Wie sieht $\sigma(T)$ explizit aus? Wie kann man spezifische Komponente des Spektrums ausschließen?

(**F5**) Welche Objekten kommen beim mathematischen Formalismus von Streuung vor?

Plan

- Spektralsatz (**F1**)
- Störungstheorie (**F2**) und (**F3**)
- Selbstadjungierte Fortsetzungen
- Sturm–Liouville Operatoren (**F1**) und (**F4**)
- Schrödingeroperatoren (**F2**), (**F3**) und (**F4**)
- Diracoperatoren (**F2**), (**F3**) und (**F4**)
- Streutheorie (**F5**)

Literatur

- Hauptreferenzen
  - J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen Teil I: Grundlagen*, Teubner, Stuttgart, 2000. [**Wei-1**]
  - J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen Teil II: Anwendungen*, Teubner, Wiesbaden, 2003. [**Wei-2**]
- Weitere Referenzen
  - J. Blank, P. Exner and M. Havlíček, *Hilbert Space Operators in Quantum Physics, 2nd ed.*, Springer, Dordrecht, 2008.
  - D. Damanik and J. Fillman, *One-Dimensional Ergodic Schrödinger Operators I. General Theory*, AMS, Providence, RI, 2022.
  - R. Denk, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin, 2022.
  - G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Applications to Schrödinger Operators*, AMS, Providence, RI, 2009.

1 Spektraltheorie selbstadjungierten Operatoren

Ziele dieses Kapitels:

- Entwicklung der Theorie von Spektralschare und Spektralmaße, und der zugehörige Spektralkalkül
- Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte selbstadjungierten Operatoren (mit Hilfe vom Satz von Herglotz)
- Folgerungen des Spektralsatzes (z.B., Zusammenhang zwischen dem Verhalten der Spektralschar und Eigenschaften des Spektrums $\sigma(T)$ und spezifischer Spektralkomponente).

1.1 Integrale bezüglich einer Spektralschar

Definition 1.1 (Spektralschar)**.** Sei X ein Hilbertraum. Eine *Spektralschar* in X ist eine Funktion $E\colon \mathbb{R} \to B(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $E(t)$ ist eine orthogonale Projektion für jedes $t \in \mathbb{R}$,

(ii) $E(s) \leqslant E(t)$ (d.h., $R(E(s)) \subset R(E(t))$) bzw. $\langle x, E(s)x\rangle \leqslant \langle x, E(t)x\rangle$ für $s \leqslant t$ (Monotonie),

(iii) $\text{s-lim}_{\delta\to 0^+} E(t+\delta) = E(t)$ (d.h., $E(t+\delta)x \to E(t)x$ für $\delta \to 0^+$ und alle $x \in X$ (starke Rechtssttigkeit),

(iv) $\text{s-lim}_{t\to-\infty} E(t) = 0$,

(v) $\text{s-lim}_{t\to\infty} E(t) = I$.

Proposition 1.2. *Sei (P_n) eine monotone Folge orthogonaler Projektionen im Hilbertraum X. Dann existiert eine orthogonale Projektion P in X mit $P_n \xrightarrow{s} P$. Insbesonders gilt $R(P) = \overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} R(P_n)}$, falls (P_n) wachsend ist.*

Beweis. Übung! $\square$

Bemerkung 1.3. Der fallende Fall von Proposition 1.2 ergibt sich, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ auch der linksseitige Limes $E(t-) := \text{s-}\lim_{\delta\to 0^+} E(t-\delta)$ in (iii) existiert.

Beispiel 1.4. Seien $P_\alpha (\alpha \in A)$ orthogonale Projektionen in X mit $P_\alpha P_\beta = 0$ für $\alpha \neq \beta$ und $\sum_{\alpha\in A} P_\alpha = I$, μ_α $(\alpha \in A)$ reele Zahlen ($\mu_\alpha \neq \mu_\beta$ für $\alpha \neq \beta$). Dann wird durch

$$E\colon \mathbb{R} \to B(X), \quad t \mapsto \sum_{\{\alpha\in A\colon\, \mu_\alpha \leqslant t\}} P_\alpha$$

eine Spektralschar definiert.

(i) Nach Definition und Proposition 1.2 ist $E(t)$ die orthogonale Projektion auf dem (abgeschlossenen!) Teilraum, der von den $R(P_\alpha)$ mit $\mu_\alpha \leqslant t$ aufgespannt wird.

(ii) Klar.

(iii) Sei $x \in X, t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es höchstens abzählbar viele α_i mit $P_{\alpha_i}x \neq 0$ und $\sum_i \|P_{\alpha_i}x\|^2 = \|x\|^2 < \infty$. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i>n_0} \|P_{\alpha_i x}\|^2 < \varepsilon$. Wähle $\delta_0 > 0$ so dass $\mu_{\alpha_i} \in (t, t+\delta_0]$ für $i \leqslant n_0$, so folgt

$$\|E(t+\delta)x - E(t)x\|^2 = \sum_{\{i:\ \mu_{\alpha_i} \in (t,t+\delta]\}} \|P_{\alpha_i}x\|^2 \leqslant \sum_{i>n_0} \|P_{\alpha_i}x\|^2 < \varepsilon$$

für alle $\delta \in (0, \delta_0]$.

(iv) Zu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ wählt man n_0 wie in (iii). Dann gibt es ein $t_- \in \mathbb{R}$ und $\mu_{\alpha_i} > t_-$ für $i \leqslant n_0$, also

$$\|E(t)x\|^2 = \sum_{\{i:\ \mu_{\alpha_i} \leqslant t\}} \|P_{\alpha_i}x\|^2 \leqslant \sum_{i>n_0} \|P_{\alpha_i}x\|^2 < \varepsilon \quad \text{für } t \leqslant t_-.$$

(v) Analog bei (iv) (betrachte $x - E(t)x$).

14.04.26

Beispiel 1.5. Sei $X = L^2(\mathbb{R}, \varrho)$ oder $\oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \varrho_\alpha)$. Dann definiert

$$E(t)f = \chi_{(\infty,t]}f \quad \text{bzw.} \quad E(t)(f_\alpha)_{a \in A} = \left(\chi_{(\infty,t]}f_\alpha\right)_\alpha.$$

eine Spektralschar (wobei χ_S der Multiplikationsoperator mit der charakteristischer Funktion der Menge S ist). Hier schreiben wir χ_S auch für die charakteristische Funktion.

Beispiel 1.6. Sei (Y, μ) ein Maßraum, $g\colon Y \to \mathbb{R}$ eine μ-messbare Funktion. Dann wird durch

$$E(t)f = \chi_{\{y \in Y:\ g(y) \leqslant t\}}f \quad \text{für} \quad f \in L^2(Y, \mu)$$

eine Spektralschar in $L^2(Y, \mu)$ definiert. Später: $E(t)$: Spektralschar des Operators M_g (Multiplikation mit der Funktion g).

Zu jeder Spektralschar in X und jedem $x \in X$ definieren wir eine rechtsstetige wachsende Funktion $F_x = F_x^{(E)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_x(t) := \|E(t)x\|^2.$$

Es folgt aus Eigenschaften (iv) und (v), dass

$$F_x(t) \to \begin{cases} 0 & \text{für } t \to -\infty \\ \|x\|^2 & \text{für } t \to \infty. \end{cases}$$

Durch F_x wird ein Lebesgue–Stieltjes–Maß ϱ_x (was ein endliches Maß auf $\mathbb{R}$ ist) erzeugt. Mann nennt ϱ_x das durch x ergzeugte *Spektralmaß* (vgl. mit LAP4, Teil 10: $\varrho_x \equiv \mu_\psi$) mit Verteilungsfunktion $F_x(t)$.

Definition 1.7. Eine Funktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt E-messbar, wenn sie ϱ_x-messbar ist für jedes $x \in X$.

Bemerkung 1.8.

1. Jede Borel-messbare Funktion ist E-messbar für jede Spektralschar E.
2. Jeder punktweise Limes von Treppenfunktionen ist E-messbar.

Für eine Spektralschar E und jedes $x \in X$ definieren wir den *durch x erzeugten Teilraum* H_x durch

$$H_x = H_x^{(E)} := \overline{\operatorname{lin}\{E(t)x : t \in \mathbb{R}\}}.$$

Proposition 1.9. *Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum X, $x \in X$. Dann gilt*

(i) *Die Abbildung*

$$V\colon \operatorname{lin}\{E(t)x : t \in \mathbb{R}\} \to L^2(\mathbb{R}, \varrho_x), \quad \sum_{j=1}^{n} c_j E(t_j)x \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{(-\infty,t_j]}$$

ist isometrisch.

(ii) *Die Abschließung $U := \overline{V}\colon H_x \to L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ ist unitär.*

(iii) *Sei $E_x(\cdot)$ die Einschränkung von $E(\cdot)$ auf H_x. Dann gilt*

$$UE_x(t) = \chi_{(-\infty,t]}U \quad \text{bzw.} \quad E_x(t)U = U^{-1}\chi_{(-\infty,t]}.$$

Beweis. Jedes $y \in \operatorname{lin}\{E(t)x : t \in \mathbb{R}\}$ lässt sich schreiben als $y = \sum_k d_k\Big(E(b_k) - E(a_k)\Big)$, wobei $(a_k, b_k]$ disjunkte Intervallen sind ($a_k = -\infty$ erlaubt).

(i)

$$\begin{aligned}\|Vy\|^2 = \Big\| \sum_k d_k \chi_{(a_k,b_k]} \Big\|^2 &= \sum_k |d_k|^2 (F_x(b_k) - F_x(a_k)) \\ &= \sum_k |d_k|^2 \Big\| (E(b_k) - E(a_k))x \Big\|^2 = \Big\| \sum_k d_k (E(b_k) - E(a_k))x \Big\|^2 = \|y\|^2\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ V ist isometrisch.

(ii) $R(V)$ enthält alle linksseitigen Treppenfunktionen. Da diese in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ dicht sind, ist $\overline{R(V)} = R(\overline{V}) = L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$.

$\Longrightarrow$ $U = \overline{V}$ ist unitär

(iii) Für $y = \sum_k c_k E(t_k)x$ gilt

$$\begin{aligned}UE(t)y = U \sum_k c_k E(\min\{t, t_k\})x &= \sum_k c_k \chi_{(-\infty,\min\{t,t_k\}]} \\ \chi_{(-\infty,t]} \sum_k c_k \chi_{(-\infty,t_k]} &= \chi_{(-\infty,t]} Uy\end{aligned}$$

Dies folgt für alle $y \in H_x$ (warum?). Die letzte Behauptung folgt aus Multiplikation von links (bzw. rechts) mit U^{-1}.

□

Der folgende Satz zeigt, dass jede Spektralschar unitär äquivalent zu einer Spektralschar vom Typ des Beispiels 1.5 ist für separable Hilberträume.

Satz 1.10. *Ist E eine Spektralschar im separablen Hilbertraum X, so gibt es beschränkte Borelmaße ϱ_j ($j = 1, \dots, N$ mit $N \leqslant \infty$) auf $\mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung*

$$U\colon X \to \oplus_{j=1}^N L^2(\mathbb{R}, \varrho_j),$$

so dass gilt

$$UE(t)U^{-1} = \chi_{(-\infty,t]} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Da X separabel ist, existiert eine abzählbare totale Menge $\{x_j\}$. Seien $h_1 := x_1$ und $h_{j+1} := (I - P_1 - \dots - P_j)x_{j+1}$, wobei P_k die orthogonale Projektion auf $H_k := H_{x_k}$ ist.

Bemerkung: Falls $\oplus_{j=1}^N H_j = X$ für $N < \infty$ terminiert das Verfahren in endlich vielen Schritte. Sonst bekommen wir eine abzählbare Folge (h_j) mit $\oplus_j H_j = X$.
Definieren wir $\varrho_j := \varrho_{h_j}$ und V_j wie bei Proposition 1.9, d.h.,

$$V_j\colon \sum_k c_k E(t_k) h_j \mapsto \sum_k c_k \chi_{(-\infty,t_k]}.$$

Nach voriger Proposition sind die Abschließungen $U_j := \overline{V_j}\colon H_j \to L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$, sowie deren orthogonale Summe

$$U := \oplus_j U_j\colon X = \oplus_j H_j \to \oplus_j L^2(\mathbb{R}, \varrho_j), \quad (y_j)_j \mapsto (U_j y_j)_j$$

unitär.
Es gilt für $x = (y_j)_j \in \oplus_j H_j = X$

$$\begin{aligned} UE(t)x = UE(t)(y_j)_j = U(E(t)y_j)_j = (U_j E(t) y_j)_j = (\chi_{(-\infty,t]} U_j y_j)_j \\ \chi_{(-\infty,t]}(U_j y_j)_j = \chi_{(-\infty,t]} U(y_j)_j = \chi_{(-\infty,t]} U x. \end{aligned}$$

Damit folgt $E(t) = U^{-1}\chi_{(-\infty,t]}U$. □

Nun wollen wir das Konzept eines Integrals bezüglich einer Spektralschar erklären. Wir führen es zuerst für Treppenfunktionen ein und Grenzüberang liefert dieselbe Aussagen für Funktionen in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$.

Definition 1.11 (Integral einer Treppenfunktion bzgl. E)**.** Gegeben eien Treppenfunktion $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (o.E. mit disjunkten Konstanzintervallen I_j), $u(t) = \sum_j c_j \chi_{I_j}$ definieren wir das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} u(t)\,\mathrm{d}E(t) = \int u(t)\,\mathrm{d}E(t) := \sum_j c_j E(I_j).$$

Eigenschaften/Formeln:

(i) $E((a,b]) = E(b) - E(a)$ und $E(\{a\}) = E(a) = E(a-)$.

(ii) Für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x \right\|^2 &= \sum |c_j|^2 \|E(I_j)x\|^2 = \sum |c_j|^2 \varrho_x(I_j) \\ &= \int |u(t)|^2 \mathrm{d}\varrho_x(t) \leqslant \|x\|^2 \max |u|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt dass $\int u(t)\,\mathrm{d}E(t) \in B(X)$ mit Norm $\leqslant \max |u|$.

(iii) Sei $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine beliebige E-messbare Funktion. Für jedes $x \in X$ mit $u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ gibt es eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen mit $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$.

Insbesondere ist (u_n) eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$, und es gilt

$$\begin{aligned}\left\| \int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x - \int u_m(t)\,\mathrm{d}E(t)x \right\|^2 &= \left\| \int (u_n(t) - u_m(t))\,\mathrm{d}E(t)x \right\|^2 \\ &= \int |u_n(t) - u_m(t)|^2\,\mathrm{d}\varrho_x(t) \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty,\end{aligned}$$

d.h., $\left(\int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x\right)_n$ ist eine Cauchyfolge in X. Wir können also definieren

$$\int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x := \lim_{n\to\infty} \int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x.$$

Es gilt

$$\left\| \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x \right\|^2 = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)}.$$

(iv) Linearität des Integrals:
Für $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int (au(t) + bv(t))\,\mathrm{d}E(t)x = a \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x + b \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x$$

16.04.26

1.2 Operatoren als Integrale über Spektralscharen

Satz 1.12. *Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum X, $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine E-messbare Funktion. Dann wird duch*

$$\begin{aligned} D(u_E) &:= \{x \in X \colon u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)\}, \\ u_E(x) &:= \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x \quad \text{für} \quad x \in D(u_E) \end{aligned}$$

ein normaler Operator u_E erklärt. Für den definierten Operator u_E schreiben wir im folgenden auch $\int u(t)\,\mathrm{d}E(t)$. Ist u reelwertig, so ist u_E selbstadjungiert. □

Vorbereitung/Voraussetzungen:

1. $u, v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: E-messbar

2. $\varphi_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_n(z) = \begin{cases} z, & \text{für } |z| \leqslant n, \\ 0, & \text{für } |z| > n. \end{cases}$

3. $\gamma_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \gamma_n(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } |z| \leqslant n, \\ 0, & \text{für } |z| > n. \end{cases}$

4. $\varrho_{y,x}$ ist das komplexe Maß gegeben durch

$$\varrho_{y,x} = \varrho_{y+x} - \varrho_{y-x} + \mathrm{i}\varrho_{y-\mathrm{i}x} - \mathrm{i}\varrho_{y+\mathrm{i}x}$$

Spektralkalkül:

(a) Für $x \in D(u_E)$ and $y \in D(v_E)$ gilt

$$\langle v_E y, u_E x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int \overline{\varphi_n(v(t))}\varphi_n(u(t))\,\mathrm{d}\,\langle y, E(t)x\rangle =: \int \overline{v(t)}u(t)\,\mathrm{d}\varrho_{y,x}(t).$$

(b) Für $x \in D(u_E)$ gilt $\|u_E x\|^2 = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)}$.

(c) Ist u beschränkt, so ist $u_E \in B(X)$ mit $\|u_E\| \leqslant \sup\{|u(t)| \colon t \in \mathbb{R}\}$.

(d) Für die Einsfunktion $\mathbb{1}$ gilt $\mathbb{1}_E = I$.

(e) Für $x \in D(u_E)$ und alle $y \in X$ gilt

$$\langle y, u_E x\rangle = \int u(t)\,\mathrm{d}\varrho_{y,x}(t).$$

(f) Ist $u(t) \geqslant c$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist u_E nach unten halbbeschränkt mit unterer Schranke c.

(g) $(u+v)_E \supset u_E + v_E$ und $D(u_E + v_E) = D((|u| + |v|)_E)$.

(h) $(uv)_E \supset u_E v_E$ und $D(u_E v_E) = D(v_E) \cap D((uv)_E$

(i) $D(u_E)$ ist dicht, $D(u_E) = D(\overline{u}_E)$ und $(u_E)^* = \overline{u}_E$

(j) Ist $u = \chi_S$ (char. Funktion einer Menge $S \subset \mathbb{R}$), so ist $u_E = (\chi_S)_E$ eine orthogonale Projektion. Wir schreiben dafür $E(S)$, wodurch ein projektionwertiges Maß auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

Für den Linearitätsbeweis benötigen wir den Satz von den monotonen Konvergenz von Beppo Levi.

Lemma 1.13 (Satz von Beppo Levi)**.** *Ist (f_n) eine nicht-fallende Folge in $L^1(Y,\varrho)$ mit $\int f_n\,\mathrm{d}\varrho \leqslant C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es $f \in L^1(Y,\mu)$ mit*

$$f_n(x) \to f(x) \ \ \varrho-\text{f.ü.} \quad \textit{und} \quad \int f_n\,\mathrm{d}\varrho \to \int f\,\mathrm{d}\varrho.$$

$\square$

Beweis von Satz 1.12 und des Spektralkalküls.
Linearität: z.z.: $D(u_E)$ ein linearer Teilraum von X ist und $u_E \colon D(u_E) \to X$ eine lineare Abbildung ist.
Klar: $ax \in D(u_E)$ und $u_E(ax) = au_E x$, für alle $x \in D(u_E)$ und $a \in \mathbb{C}$. Es bleibt noch zu zeigen:

(1) $x, y \in D(u_E) \implies x + y \in D(u_E)$

(2) $u_E(x+y) = u_E(x) + u_E(y)$

Sei u beschränkt, (u_n) eine beschränkte Folge von Treppenfunktionen mit $u_n(t) \to u(t)$ ϱ-fast überall, wobei $\varrho = \varrho_x + \varrho_y$. Dann gilt $u_n(t) \to u(t)$ ϱ_α-f.ü für $\alpha \in \{x, y, x+y\}$. Nach dem Satz von Lebesgue gilt auch $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R},\varrho_\alpha)$. Aus der Beschränktheit von u folgt, dass $D(u_E) = X$, und daher $x + y \in D(u_E)$. Also gilt

$$u_E(x+y) = \lim_{n\to\infty}(u_n)_E(x+y) = \lim_{n\to\infty}((u_n)_E(x) + (u_n)_E(y)) = u_E(x) + u_E(y).$$

Sei nun u eine beliebige E-messbare Funktion mit $x, y \in D(u_E)$. Wir wollen (1) und (2) für u zeigen.
Betrachte die Folge $(|\varphi_n \circ u|)_n$. Diese Folge konvergiert punktweise und nichtfallend gegen $|u|$. Man kann mit der vorigen Vorüberlegung zeigen, dass

$$\left(\int |\varphi_n(u(t))|^2 \,\mathrm{d}\varrho_{x+y}(t)\right)^{1/2} \leqslant \|u_E x\| + \|u_E y\| < \infty.$$

Aus Lemma 1.13 folgt $u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_{x+y})$ und $\varphi_n \circ u \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_{x+y}) \implies x+y \in D(u_E)$ und

$$\begin{aligned} u_E(x+y) &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E(x+y) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big((\varphi_n \circ u)_E(x) + (\varphi_n \circ u)_E(y)\Big) = u_E(x) + u_E(y). \end{aligned}$$

Nun wollen wir die Aussagen (a)-(j) zeigen.

(a) Übung.

(b) Übung.

(c) Übung.

(d) Es folgt nach Teil (c) dass $\mathbb{1}_E \in B(X)$. Es gilt $\chi_{(-n,n]} \to \mathbb{1}$ in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$, also

$$\mathbb{1}_E x = \lim_{n\to\infty} \left(\chi_{(-n,n]}\right) E x = \lim_{n\to\infty} (E(n) - E(-n))x = x \quad \text{für alle } x.$$

(e) Folgt aus (a) und (d), mit $v = \mathbb{1}$.

(f) Folgt aus (e) mit $y = x$.

(g) Ist $x \in D(u_E + v_E) = D(u_E) \cap D(v_E)$, so gilt $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$, also $x \in D((u+v)_E)$. Aus Linearität folgt $(u+v)_E x = u_E(x) + v_E(x)$.
u, v E-messbar $\implies u, v \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x) \iff |u| + |v| \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$, d.h., $D(u_E + v_E) = D(|u|_E + |v|_E)$.

(h) Für u E-messbar und beschränkt, und $x, y \in X$ gilt

$$\langle y, u_E x\rangle \overset{\text{(e)}}{=} \int u(t) \,\mathrm{d}\varrho_{y,x} = \overline{\int \overline{u(t)} \,\mathrm{d}\varrho_{x,y}} = \overline{\langle x, \overline{u}_E y\rangle} = \langle \overline{u}_E y, x\rangle$$

Damit folgt (für u, v E-messbar und beschränkt):

$$\begin{aligned} \langle y, u_E v_E x\rangle &= \langle y, u_E(v_E x)\rangle = \langle \overline{u}_E y, v_E x\rangle \\ &\overset{\text{(a)}}{=} \int u(t) v(t) \,\mathrm{d}\varrho_{y,x}(t) = \langle y, (uv)_E x\rangle, \end{aligned}$$

also $u_E v_E = (uv)_E$.
Es sei $x \in D(u_E v_E)$ (d.h., $x \in D(v_E)$ und $v_E x \in D(u_E)$). Für beliebige E-messbare Funktionen u, v nutzt man die Approximation mit $\varphi_n \circ u$ (bzw. $\varphi_n \circ v$) um zu zeigen, dass

$$u_E v_E(x) = \lim_{n\to\infty} \Big((\varphi_n \circ u) v\Big)_E x.$$

Die obige Gleichung bedeutet, dass $\Big((\varphi_n \circ u)v\Big)_n$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ ist, die (nach Konstruktion) gegen uv punktweise konvergiert.

$\implies uv \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x), x \in D((uv)_E)$, und $(uv)_E x = u_E v_E x$, d.h.,

$$D(u_E v_E) \subset D(v_E) \cap D((uv)_E) \quad \text{und} \quad u_E v_E \subset (uv)_E.$$

Noch z.z.: $D(u_E v_E) \supset D(v_E) \cap D((uv)_E)$.

Sei nun $x \in D(v_E) \cap D((uv)_E)$. Wegen $|(\varphi_n \circ u)v| \leqslant uv$ ist dann $x \in D(((\varphi_n \circ u)v)_E)$ und $(\varphi_n \circ u)v \to uv$ in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$, also

$$\begin{aligned}(uv)_E x &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \Big((\varphi_n \circ u)(\varphi_m \circ v)\Big)_E x \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E (\varphi_m \circ v)_E x = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E v_E x.\end{aligned}$$

Dies liefert $u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_{v_E x})$ und $v_E x \in D(u_E)$, also $x \in D(u_E v_E)$.

(i) Übung. Die Normalität von u_E folgt, denn es gilt

$$\begin{aligned}&D((u_E)^*) = D(\overline{u_E}) = D(u_E),\\ &\|(u_E)^* x\|^2 = \|\overline{u}_E x\|^2 = \int |u(t)|^2 \,\mathrm{d}\varrho_x(t) = \|u_E x\|^2.\end{aligned}$$

Es folgt auch direkt, dass u_E selbstadjungiert, falls u reell ist.

(j) Dies folgt aus (c), (h) und (i).

Bemerkung: Für $P \in B(X)$ sind folgende Aussagen äquivalent.

- P ist eine orthogonale Projektion
- P ist selbstadjungiert und idempotent

□ 21.04.26

1.3 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

Satz 1.14. *Zu jedem selbstandjungierten Operator T im Hilbertraum X gibt es genau eine Spektralschar E mit $\mathrm{id}_E = T$. Im komplexen Hilbertraum is $E(\cdot)$ gegeben durch die Stonesche Formel*

$$\langle y, E(t)x\rangle = \lim_{\delta\to 0^+} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{t+\delta} \Big\langle y, \Big((T-s-\mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (T-s+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1}\Big)x\Big\rangle \tag{1}$$

für alle $x, y \in X$ und $t \in \mathbb{R}$.

Zutaten des Beweises:

- Stieltsjesschen Umkehrfunktion
- Satz von Herglotz
- Eigenschaften der Resolvente
- Korrepondenz zwischen lineare Formen und Operatoren

- Eigenschaften von Spektralscharen
- Konvergenzeigenschaften von Folgen von Projektionen

Lemma 1.15 (Stieltjes-Umkehrformel)**.** *Sei $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion von beschränkter Variation; außerdem sei w rechststetig mit $w(t) \to 0$ für $t \to -\infty$. Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei durch*

$$f(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}w(t) \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

definiert. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$w(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{t+\delta} \Big(f(s+\mathrm{i}\varepsilon) - f(s-\mathrm{i}\varepsilon) \Big)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

Insbesondere ist w durch f eindeutig bestimmt. Ist w reelwertig, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$w(t) = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} \operatorname{Im} f(s+\mathrm{i}\varepsilon)\,\mathrm{d}s. \tag{3}$$

Beweis. Übung. □

Lemma 1.16 (Satz von Herglotz)**.** *Sei $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ (obere Halbebene), $M \geqslant 0$ und $f\colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ holomorph mit*

$$\operatorname{Im} f(z) \geqslant 0 \quad \text{und} \quad |f(z)\operatorname{Im}(z)| \leqslant M \quad \textit{für } z \in \mathbb{C}_+.$$

Eine solche Funktion bezeichnen wir als Herglotz-Funktion. Zu jeder Herglotz-Funktion gibt es genau eine rechststetige nicht-fallende Funktion $w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $w(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ und

$$f(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}w(t) \quad \text{für} \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $w(t) \leqslant M$ und $w(t)$ ist durch Eq. (3) *gegeben.*

Beweis. Siehe [**Wei-1**, Satz B.2]. □

Beweis von Satz 1.14.
Betrachte die Funktion $u_z(t) := (t-z)^{-1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Für ein festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $u_z(t)$ ist stetig und beschränkt. Es folgt daraus, dass $D((u_z)_E) = X$ für jede beliebige Spektralschar E.

- **Eindeutigkeit:**

  Ist $T = \mathrm{id}_E$, so gilt nach Satz 1.12 mit $u_z(t) := (t-z)^{-1}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

  $$(T-z)(u_z)_E = I \quad \text{und} \quad (u_z)_E(T-z) = I|_{D(T)},$$

  d.h., es gilt $(u_z)_E = (T-z)^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, und somit nach Satz 1.12(a)

  $$\Big\langle y, (T-z)^{-1}x \Big\rangle = \int \frac{1}{t-z}\mathrm{d}_t \langle y, E(t)x \rangle \quad \text{für } x, y \in X, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

  Nach Lemma 1.15 folgt, dass $\langle y, E(t)x \rangle$ die Darstellung in Eq. (1) besitzt, d.h., die Spektralschar die T erzeugt (falls es existiert) durch T eindeutig bestimmt wird.

- **Existenz:** Falls eine Spektralschar E mit $\mathrm{id}_E = T$ existiert, ist diese durch gegeben Eq. (1). Hier werden wir dann zeigen, dass Eq. (1) eine Spektralschar definiert, mit $\mathrm{id}_E = T$.

  Betrachte die Funktion

$$f_x \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}, \quad f_x(z) = \left\langle x, (T-z)^{-1}x \right\rangle .$$

  (a) **f_x ist eine Herglotz-Funktion**
  f_x ist holomorph in $\mathbb{C}_+$, da die Resolvente $(T-z)^{-1}$ in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \subset \rho(T)$ holomorph ist **(ÜA 3)**. Für $z \in \mathbb{C}_+$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_x(z) &= \operatorname{Im} \left\langle x, (T-z)^{-1}x \right\rangle \\ &= \operatorname{Im} \left\langle (T-z)(T-z)^{-1}x, (T-z)^{-1}x \right\rangle \\ &= (\operatorname{Im} z)\|(T-z)^{-1}x\|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

  und

$$|f_x(z)\operatorname{Im}(z)| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1}\|x\|^2|\operatorname{Im} z| = \|x\|^2.$$

  (Bem: $|f_x(z)| \leqslant \|(T-z)^{-1}\| \cdot \|x\|^2 \leqslant \frac{\|x\|^2}{|\operatorname{Im}(z)|}$.)
  Das heißt $f_x(z)$ ist eine Herglotz-Funktion für $x \neq 0$, mit $M = \|x\|^2$. Nach dem Satz von Hergoltz gilt

$$f_x(z) = \left\langle x, (T-z)^{-1}x \right\rangle = \int \frac{1}{t-z} \mathrm{d}w_x(t) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}_+,$$

  mit der rechtsstetigen nicht-fallenden Funktion

$$w_x(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{t+\delta} \left\langle x, \left((T-s-\mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (T-s+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1}\right)x \right\rangle \mathrm{d}s.$$

  Es gilt außerdem $w_x(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ und $w_x(t) \leqslant \|x\|^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
  Die Polarisierungsidentität liefert

$$f_{y,x}(z) = \left\langle y, (T-z)^{-1}x \right\rangle = \int \frac{1}{t-z} \mathrm{d}w_{y,x}(t) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}_+,$$

  mit

$$w_{y,x}(t) = \lim_{\delta\to 0^+} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{t+\delta} \left\langle y, \left((T-s-\mathrm{i}\varepsilon)^{-1} - (T-s+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1}\right)x \right\rangle \mathrm{d}s.$$

  (b) **Die Sesquilinearform $w_{y,x}$ definiert einen eindeutigen selbstadjungierten Operator $E(t) \in B(X)$**
  Die Abbildung $X \times X \to \mathbb{C}$, $(y,x) \mapsto w_{y,x}(t)$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Sesquilinearform, da

$$|w_{y,x}(t)|^2 \leqslant w_y(t)w_x(t) \leqslant \|y\|^2\|x\|^2$$

  Insbesondere folgt aus **(ÜA 2)**, dass es einen beschränkten Operator S_t gibt mit $\langle y, S_t x\rangle = w_{y,x}(t)$. Außerdem gilt dass $w_{y,x}$ hermitesch und nichtnegativ ist ($w_{x,x}(t) = w_x(t) \geqslant 0$). Daraus folgt dass S_t selbsadjungiert ist. Sei $E(t) := S_t$. Wir haben dann

$$\langle y, E(t)x\rangle = w_{y,x}(t) \quad \text{für alle } x, y \in X$$

  und

$$f_{y,x}(z) = \left\langle y, (T-z)^{-1}x \right\rangle = \int \frac{1}{t-z} \, \mathrm{d}_t \left\langle y, E(t)x \right\rangle .$$

(c) $E(\cdot)$ **definiert eine Spektralschar** An dieser Stelle zeigen wir, dass $E(\cdot)$ eine Spektralschar ist.

noch z.z.: (i) und (ii)

(i) und (ii) $E(t)$ **ist orthogonale Projektion und** $E(s) \leqslant E(t)$ **für** $s \leqslant t$

Für $z, z' \in \mathbb{C}_+$ mit $z \neq z'$ gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{t-z} \mathrm{d}_t \left\langle (T-\overline{z'})^{-1} y, E(t)x \right\rangle &= \left\langle (T-\overline{z'})^{-1} y, (T-z)^{-1} x \right\rangle \\
&= \left\langle y, (T-z')^{-1}(T-z)^{-1} x \right\rangle \\
&= \frac{1}{z-z'} \left(\left\langle (y, (T-z')^{-1} x \right\rangle - \left\langle (y, (T-z)^{-1} x \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{z-z'} \int \left(\frac{1}{t-z'} - \frac{1}{t-z} \right) \mathrm{d}_t \left\langle y, E(t)x \right\rangle \\
&= \int \frac{1}{t-z} \mathrm{d}_t \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'} \mathrm{d}_s \left\langle y, E(s)x \right\rangle .
\end{aligned}$$

Bem. : $\left((T-z)^{-1}\right)^* = (T-\overline{z})^{-1}$ für T selbstadjungiert.
Hier liefert die 1. Resolventengleichung: das 3. Gleichheitzeichen:

$$R(T,z)R(T,z') = \frac{R(T,z) - R(T,z')}{z-z'},$$

während das letzte aus Absolutstetigkeit folgt.
Mit der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 1.15 folgt daraus

$$\left\langle (T-\overline{z'}) y, E(t)x \right\rangle = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'} \mathrm{d}_s \left\langle y, E(s)x \right\rangle ,$$

d.h., für alle $z' \in \mathbb{C}_+$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{s-z'} \mathrm{d}_s \left\langle y, E(s)E(t)x \right\rangle &= \left\langle y, (T-z')^{-1} E(t)x \right\rangle \\
&= \left\langle (T-\overline{z'})^{-1} y, E(t)x \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-z'} \mathrm{d}_s \left\langle y, E(s)x \right\rangle
\end{aligned}$$

Eindeutigkeitaussage nochmal anwenden! $\Longrightarrow$

$$\left\langle y, E(s)E(t)x \right\rangle = \begin{cases} \left\langle y, E(s)x \right\rangle , & \text{für } s \leqslant t \\ \left\langle y, E(t)x \right\rangle , & \text{für } s \geqslant t, \end{cases}$$

d.h., es gilt $E(s)E(t) = E(\min\{s,t\})$. Insbesondere ist $E(t)$ idempotent. Also ist $E \colon \mathbb{R} \to (X)$ eine wachsende projektionswertige Abbildung.

(iii) $E(t)$ **ist stark-rechtsstetig**

Dies folgt aus der Rechtsstetigkeit von w_x:

$$\begin{aligned}
\|E(t+\delta) - E(t)x\|^2 &= \|E(t+\delta)x\|^2 - \|E(t)x\|^2 \\
&= w_x(t+\delta) - w_x(t) \to 0 \quad \text{für } \delta \to 0
\end{aligned}$$

(iv) $E(t) \xrightarrow{s} 0$ **für** $t \to -\infty$

Dies folgt aus $\|E(t)x\|^2 = w_x(t) \to 0$.

(v) $E(t) \xrightarrow{s} I$ **für** $t \to \infty$
Nach **(ÜA 1)** existiert eine orthogonale Projektion E_∞ mit $E(t) \xrightarrow{s} E_\infty$ für $t \to \infty$ und $E(t) \leqslant E_\infty$ für alle t.
Betrachte $F := I - E_\infty$. Es gilt

$$E(t)F = E(t)(I - E_\infty) = (E(t) - E(t)) = 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

$\Longrightarrow$

$$\left\langle y, (T-z)^{-1}Fx \right\rangle = \int \frac{1}{t-z} \,\mathrm{d}_t \langle y, E(t)Fx \rangle = 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}_+.$$

Also is $(T-z)^{-1}F = 0$ und somit $F = 0$.

Wegen $(u_z)_E = (T-z)^{-1}$ für $u_z(t) = (t-z)^{-1}$ gilt also $(v_z)_E = T - z$ für $v_z = \mathrm{id} - z$, und somit $\mathrm{id}_E = T$. $\square$

23.04.26