

Leitfaden zur Vorlesung Vertiefung Mathematik II für Naturwissenschaften und Technik

von Michael Baake

unter Einbezug einer
Skriptvorlage von Dirk Frettlöh

ausgearbeitet von
Andreas Klötgen

mit Ergänzungen von
Michael Baake und Sebastian Herr

18. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Motivation und Ursprünge | 1 |
| 1.1 | Motivation und Ziele | 1 |
| 1.2 | Ursprünge: Die 1-dimensionale Wellengleichung | 1 |
| 2 | Fourier-Reihen | 5 |
| 2.1 | Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe | 9 |
| 2.2 | Weiterentwicklung der Theorie der Fourier-Reihen | 11 |
| 2.3 | Vollständigkeit und Banach'sches Kontraktionsprinzip | 13 |
| 3 | Hilbert-Räume und Fourier-Reihen | 18 |
| 3.1 | Allgemeine Eigenschaften | 18 |
| 3.2 | Die Gauß'sche Approximationsaufgabe | 21 |
| 3.3 | Fourier-Reihen: Ergänzungen | 23 |
| 4 | Fourier-Transformation | 26 |
| 4.1 | Von der Fourier-Reihe zur Fourier-Transformation | 26 |
| 4.2 | Fourier-Transformation | 27 |
| 4.3 | Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ | 32 |
| 5 | Diskrete Fourier-Transformation | 37 |
| 5.1 | Trigonometrische Interpolationsapproximation | 42 |
| 5.2 | Schnelle Fourier-Transformation | 45 |
| 5.3 | Beispiel: Bildkompression | 46 |
| 6 | Differentialgleichungen – eine kurze Wiederholung | 47 |
| 6.1 | Volterra-Integration | 47 |
| 6.2 | Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung | 49 |
| 7 | Markov-Ketten | 52 |
| 7.1 | Matrix-Normen und Matrix-Exponential | 52 |
| 7.2 | Markov-Matrizen und Markov-Generatoren | 57 |

1 Motivation und Ursprünge

1.1 Motivation und Ziele

Die Fourier-Analyse findet heute in vielen Bereichen ihre Anwendung. Dazu gehören neben mathematischen Teilgebieten wie Zahlentheorie, Statistik oder Kombinatorik auch Gebiete der Signalverarbeitung oder Kryptographie. Ein in diesem Leitfaden beschriebenes Beispiel beschäftigt sich mit der Komprimierung von Bilddateien auf einem Computer zur effizienteren Speicherung. Der mathematische Hintergrund ist auf den französischen Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier zurückzuführen, welcher im 19. Jahrhundert daran arbeitete. Dabei versuchte er in einer seiner Arbeiten, eine periodische Funktion durch eine trigonometrische Reihe darzustellen. In Abschnitt 1.2 wird ein erster Ansatz für dieses Problem erläutert, auf welchem die Fourier-Analyse aufbaut.

1.2 Ursprünge: Die 1-dimensionale Wellengleichung

Die Ursprünge der Fourier-Analyse lassen sich in der Wellengleichung finden. Betrachtet man die 1-dimensionale Wellengleichung, eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für die Darstellung von Wellen,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

benötigt man zur (eindeutigen) Lösung folgende Anfangswerte:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= g(x) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= h(x). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung wird an dieser Stelle nur kurz beschrieben, da es danach mehr um den Separationsansatz für die Anwendung auf die eingespannte Saite geht. Generell gilt für zwei beliebige, zweifach stetig ableitbare Funktionen Φ und Ψ einer Veränderlichen, dass die Summe $\Phi(x-ct) + \Psi(x+ct)$ die 1-dimensionale Wellengleichung löst (Beweis siehe Übungsaufgaben und Weiterführung in [1]). Dabei beschreibt der Term $\pm ct$ im Argument jeweils die Verschiebung des Wellenprofils $\Phi(x)$ bzw. $\Psi(x)$ entlang der x -Koordinate.

Betrachtet man nun eine an zwei Punkten (wir wählen 0 und π) eingespannte Saite, liegt eine spezielle Situation vor, die sich folgendermaßen behandeln lässt. Abbildung 1 zeigt eine Skizze der Situation. Diese Saite kann nun in eine Schwingung gebracht werden, wobei die Auslenkung an der Stelle x ($0 \leq x \leq \pi$) der Saite zur Zeit t ($t \geq 0$) gegeben ist durch eine Funktion $u: [0, \pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch die Wellengleichung aus (1) beschrieben wird. Der Separationsansatz $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ wird in die Wellengleichung (1) eingesetzt, und es ergibt sich

$$\frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \alpha^2 \frac{v''(x)}{v(x)}, \quad (2)$$

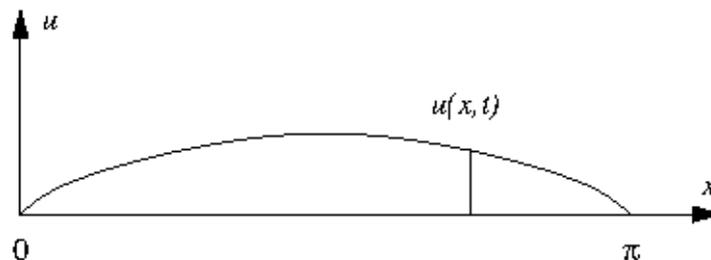


Abbildung 1: Eine in den Stellen 0 und π eingespannte Saite und ihre Auslenkung zum Zeitpunkt t , beschrieben durch die Funktion $u(x, t)$.

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Geschwindigkeits-Konstante ist. Ein Punkt (Strich) steht für die Ableitung nach t (nach x).

Da die Variablen in (2) nun getrennt auf jeder Seite der Gleichung stehen, muss unabhängig von der Wahl der Variablen x und t die Gleichung dennoch gelten. Es folgt also, egal wie x oder t verändert werden, dass der Wert konstant bleibt. Zur Veranschaulichung und einfacheren Schreibweise sei im Folgenden $\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda$. Durch Umstellen der beiden Gleichungen erhält man dann:

$$v''(x) + \lambda v(x) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{w}(t) + \alpha^2 \lambda w(t) = 0. \quad (3)$$

Gilt Gl. (3), so erfüllt $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$ die Saitengleichung. An dieser Stelle wird das Problem der Randbedingung deutlich, denn die Saite ist an zwei Stellen eingespannt. An den Stellen $x = 0$ und $x = \pi$ bestehen die Randbedingungen

$$v(0) = 0 \quad \text{und} \quad v(\pi) = 0 \quad (4)$$

für die Gleichung $v''(x) + \lambda v(x) = 0$. Dieses sogenannte *Randwertproblem* kann nur für bestimmte Werte von λ eine Lösung besitzen, wobei wir hier unter einer Lösung eine Funktion verstehen wollen, die zweimal stetig differenzierbar ist und die sowohl die DGL als auch die Randbedingungen erfüllt.

Lemma 1.1. *Ist $v \neq 0$ eine reelle Lösung des Randwertproblems für v , so ist $\lambda > 0$.*

Beweis. Da v stetig und nicht identisch 0 ist, gilt $\int_0^\pi (v(x))^2 dx > 0$ nach den üblichen Argumenten aus Analysis I. Nun können wir folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\pi (v(x))^2 dx &= - \int_0^\pi v(x) v''(x) dx \\ &= - \underbrace{[v(x) v'(x)]_0^\pi}_{=0} + \int_0^\pi (v'(x))^2 dx = \int_0^\pi (v'(x))^2 dx > 0, \end{aligned}$$

wobei der erste Schritt die Lösungseigenschaft der DGL benutzt, der zweite partielle Integration, und der dritte die Randbedingung. Da nach Annahme auch v' stetig ist, aber

nicht identisch verschwinden kann (weil dann v konstant und folglich 0 sein müsste), folgt die Ungleichung, und wir bekommen

$$\lambda = \frac{\int_0^\pi (v'(x))^2 dx}{\int_0^\pi (v(x))^2 dx} > 0$$

wie behauptet. □

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus (3) für v (vgl. Übungsaufgaben für Lösungsweg) lautet

$$v(x) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \cdot x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot x),$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten c_1 und c_2 . Aus den Randbedingungen ergibt sich

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\Rightarrow c_1 = 0, \\ v(\pi) = 0 &\Rightarrow c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \cdot \pi) = 0, \end{aligned}$$

wobei die Lösung für c_2 nicht eindeutig ist. Da aber $c_2 \neq 0$ gefordert ist (ansonsten bekämen wir $v \equiv 0$), muss der zweite Term gleich 0 sein, also $\sin(\sqrt{\lambda} \cdot \pi) = 0$. Die Sinus-Funktion ist in allen ganzzahligen Vielfachen von π gleich 0, also geht $\sqrt{\lambda} = n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Da $n = 0$ wiederum $v \equiv 0$ bedeutet, scheidet dieser Wert aus. Ausserdem bedeuten n und $-n$ letztlich dieselbe Funktion, da $\sin(-x) = -\sin(x)$ und ein Vorzeichen in die Konstante c_2 absorbiert werden kann. Also bleibt $\lambda = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe dieser Vorüberlegung kann man auch die zweite Gleichung aus (3) durch Einsetzen lösen: $\ddot{w} + (\alpha n)^2 w = 0$. Man erhält nun für die ursprüngliche Auslenkung mit Anfangsbedingungen (4) einer eingespannten Saite

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \sin(nx), \\ w_n(t) &= A_n \cos(\alpha n t) + B_n \sin(\alpha n t), \\ u_n(x, t) &= \sin(nx)(A_n \cos(\alpha n t) + B_n \sin(\alpha n t)). \end{aligned}$$

Das Ergebnis des Separationsansatzes mit $\lambda = n^2$ ist also eine Teillösung mit zwei Konstanten A_n und B_n , wobei die Teillösungen durch die Wahl von $n \in \mathbb{N}$ bestimmt werden.

Für zwei Lösungen $u_n(x, t)$ und $u_m(x, t)$ ($n, m \in \mathbb{N}$) ist (wegen der Linearität der Gleichung) auch die Summe $u_n(x, t) + u_m(x, t)$ eine Lösung des Problems. Es folgt als Ansatz eine Summierung über alle möglichen Einzellösungen des Problems,

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} u_n(x, t), \tag{5}$$

wobei es eine nicht-triviale Aussage ist, dass man hierdurch tatsächlich alle möglichen Lösungen des Randwertproblems bekommen kann.

Die Startauslenkung zur Zeit $t = 0$ ist gegeben durch die Funktion $g(x)$. Das Geschwindigkeitsprofil $h(x)$, welches die Saite zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt, bestimmt dann

zusammen mit $g(x)$ die anschließende Bewegung. Hierbei gilt insbesondere, dass diese Funktionen sinnvoll sein müssen. Das heißt, dass g keine Sprungstellen haben darf, da die Saite dann an so einer Stelle gerissen ist. Es muss also gelten, dass g und h stetig sind. Mit Hilfe der Summe (5) lassen sich die Anfangsdaten wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= g(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \sin(nx), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= h(x) = \sum_{n \geq 1} \alpha n \cdot B_n \cdot \sin(nx).\end{aligned}$$

Außerdem muss die Reihe aus (5) konvergieren und zweimal stetig nach x und t ableitbar sein, damit diese eine (klassische) Lösung der ursprünglichen Gleichung (1) ist. Darauf kommen wir später noch einmal zurück.

Aus dem Beispiel der 1-dimensionalen Wellengleichung lässt sich nun die Fourier-Analyse begründen. Die Lösung bedeutet nämlich die Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe. Die Fourier-Analyse beschäftigt sich aber auch mit komplexen Funktionen, bei denen dann komplexe e -Funktionen zum Einsatz kommen (später mehr dazu). Zunächst stößt man aber auf die Fourier-Reihen, welche sich direkt aus der aufgestellten Reihe aus (5) herleiten lassen. Im nächsten Abschnitt 2 werden diese weiter untersucht, um die Lösungen für die neu eingeführten Größen A_n und B_n zu bestimmen.