2 Fourier-Reihen

Betrachtet man die in Abschnitt 1.2 aufgestellte Reihe etwas allgemeiner, erhält man die Definition einer trigonometrischen Reihe für das Intervall $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \tag{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x, \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

Definition 2.1. Gegeben sei eine Funktion $f\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, mit $f(\pi) = f(-\pi)$. Die Reihe aus (6) heißt *Fourier-Reihe* (kurz: FR) von f auf $[-\pi, \pi]$. Die Koeffizienten a_n und b_n aus (7) und (8) heißen *Fourier-Koeffizienten* von f.

In diesem Zusammenhang stellen wir uns f auch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt vor, indem wir fordern, dass $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist f eine 2π-periodische Funktion (eine allgemeine Definition hierzu folgt noch). Sofern die Summe auf der rechten Seite von (6) in geeigneter Weise konvergiert (auch dies soll später noch genauer diskutiert werden), ist auch diese Summe 2π-periodisch.

An dieser Stelle wollen wir zunächst gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe voraussetzen, da dies in der unten benutzten Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_n und b_n verwendet wird. Näheres dazu wird es später geben, hier reicht es erst einmal als Voraussetzung. Für diese Berechnung ist zusätzlich ein Lemma hilfreich.

Lemma 2.2.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns)\sin(ms)\,\mathrm{d}s = 0 \qquad (n, m \geq 0) \tag{9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns)\cos(ms)\,\mathrm{d}s = \delta_{n,m} \qquad (n, m \geq 1) \tag{10}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ns)\sin(ms)\,\mathrm{d}s = \delta_{n,m} \qquad (n, m \geq 1) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}s = 2\,, \tag{12}$$

wobei $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \textit{falls } n = m\,, \\ 0, & \textit{sonst}\,. \end{cases}$

Beweis. Dazu hilft eine kurze Vorüberlegung, die für $n \in \mathbb{Z}$ stimmt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\,, & n \neq 0\,, \\ 2\pi\,, & n = 0\,, \end{cases} \tag{13}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{14}$$

Zusätzlich werden noch die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen verwendet:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{15}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{16}$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \tag{17}$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \tag{18}$$

Daraus folgt: Beweis für (9), für $n, m \geq 0$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns)\sin(ms)\,\mathrm{d}s \overset{(16)-(18)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)s) - \sin((n-m)s)\,\mathrm{d}s \overset{(14)}{=} 0\,.$$

Beweis für (10), für $n, m \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ns)\cos(ms)\,\mathrm{d}s &\overset{(15)+(17)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)s) + \cos((n-m)s)\,\mathrm{d}s \\ &\overset{(13)}{=} \delta_{n,m}\,.\end{aligned}$$

Beweis für (11), ebenfalls für $n, m \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ns)\sin(ms)\,\mathrm{d}s &\overset{(17)-(15)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)s) - \cos((n+m)s)\,\mathrm{d}s \\ &\overset{(13)}{=} \delta_{n,m}\,.\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Lemma 2.2 kann man nun die Koeffizienten der FR bestimmen. Zunächst für die a_n, indem die FR aus (6) mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}\cos(ns)$ multipliziert wird und anschließend von $-\pi$ bis π integriert wird, für $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\cos(ns)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\,\cos(ms) + b_m\,\sin(ms)\right)\cos(ns)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{a_0}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ns)\,\mathrm{d}s}_{=2\pi\delta_{0,n}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m\,\cos(ms) + b_m\,\sin(ms)\right)\cos(ns)\,\mathrm{d}s \\ &\quad \text{Tauschen von Integral und Summe ist hier möglich,} \\ &\quad \text{da gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt wurde} \\ &= a_0\delta_{0,n} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ms)\cos(ns)\,\mathrm{d}s}_{=\delta_{m,n}\text{ (nach (10))}} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ms)\cos(ns)\,\mathrm{d}s}_{=0\text{ (nach (9))}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m\delta_{m,n} \;=\; a_n\,.\end{aligned}$$

Die Rechnung für die b_n läuft analog, diesmal für $n \geq 1$, nur dass jetzt zunächst mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}\sin(ns)$ multipliziert wird und die Regel (11) verwendet wird. So erhält man die geschlossene Form der Fourier-Koeffizenten aus (7) und (8).

Definition 2.3. Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von der wir annehmen wollen, dass sie nicht konstant ist.
(a) f heißt *T-periodisch*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x+T) = f(x)\,.$$

Das kleinste positive T mit dieser Eigenschaft heißt *Periode* von f.
(b) Die Funktion f heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-x) = f(x) \quad \big(\text{bzw. } f(-x) = -f(x)\big).$$

Noch ist nicht klar, ob (6) wirklich gilt, also ob die Fourier-Reihe wirklich gegen f konvergiert (z.B. punktweise oder sogar gleichmäßig). Falls dies allerdings stimmt, ist die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Zusätzlich gilt durch die Periodizität der Sinus- und Cosinus-Funktion, also $\sin(x) = \sin(x + 2n\pi)$ und $\cos(x) = \cos(x + 2n\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, dass auch die Funktion f periodisch ist: $f(x) = f(x + 2n\pi)$ gilt dann für alle $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$. Die Funktion f ist also 2π-periodisch.

Beispiel 2.4. Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\big(2n\pi, (2n+1)\pi\big), \\ 0\,, & x = n\pi \ \text{ mit } n \in \mathbb{Z}, \\ -1\,, & x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\big((2n-1)\pi, 2n\pi\big). \end{cases}$$

und betrachten nun das Rechtecksignal mit 2π-periodischer Fortsetzung in beiden Richtungen. Abbildung 2 zeigt diese Situation schematisch.

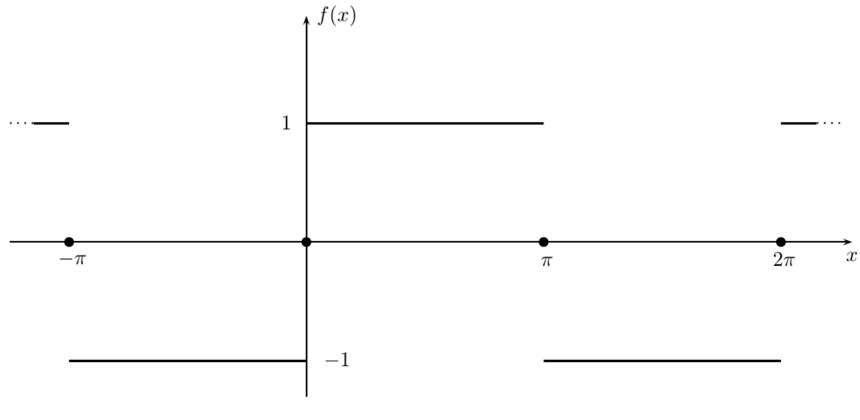

Abbildung 2: Der Verlauf des Rechtecksignals in einem kleinen Ausschnitt.

Die Funktion f aus Beispiel 2.4 ist eine ungerade Funktion, es gilt also $f(-x) = -f(x)$ für alle x. Zunächst werden nun die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n berechnet.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \overset{y=-x}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(-y)\cos(-ny)(-1)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -f(y)\cos(ny)\,\mathrm{d}y \;=\; -a_n \end{aligned}$$

Dabei wurde die Substitutionsregel eingesetzt und verwendet, dass die Cosinus-Funktion gerade ist. Man erhält, dass $a_n = -a_n$ gilt und damit $a_n = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies gilt allgemeiner für jede ungerade Funktion f. Einen Beweis für diese Aussage und das Verhalten einer geraden Funktion f bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten wird in den Übungsaufgaben weiter untersucht. Daher genügt es, an dieser Stelle nur noch die b_n weiter zu betrachten.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{y=-x}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(-y)\sin(-ny)(-1)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (-f(y))\cdot(-\sin(ny))\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \;=\; \frac{2}{\pi}\underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right)}_{=0 \text{ für gerade } n} \;=\; \begin{cases} 0\,, & n = 2k\,, \\ \frac{4}{n\pi}\,, & n = 2k+1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

In dieser Rechnung wurde verwendet, dass der Wert der Funktion f im Intervall $(0, \pi)$ gleich 1 ist, und die beiden Randpunkte zum Wert des Integrals nicht beitragen. Für gerade n gilt weiter, dass das Ergebnis immer 0 ist. So ergibt sich die Fallunterscheidung für das Ergebnis der b_n. Damit lässt sich nun eine sukzessive Approximation FR_N auf der Basis der Fourier-Reihe des Rechtecksignals folgendermaßen durch endliche Summation aufstellen:

$$\mathrm{FR}_N := \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots + \frac{\sin(2N+1)x}{2N+1}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

Die berechnete Fourier-Reihe approximiert nun die Funktion $f(x)$ mit einer Folge von stetigen Funktionen in Abhängigkeit von N. Um dies zu veranschaulichen, zeigt Abbildung 3 einige Beispiele für verschiedene Werte von N, wobei zu erkennen ist, dass die sukzessive Approximation mit steigendem N besser wird.

Der erste Term der Fourier-Reihe ist ein Vielfaches der Sinus-Funktion, durch den zweiten Term erhält die Reihe allerdings schon eine Korrektur der Kurve in Richtung der ursprünglichen Funktion.

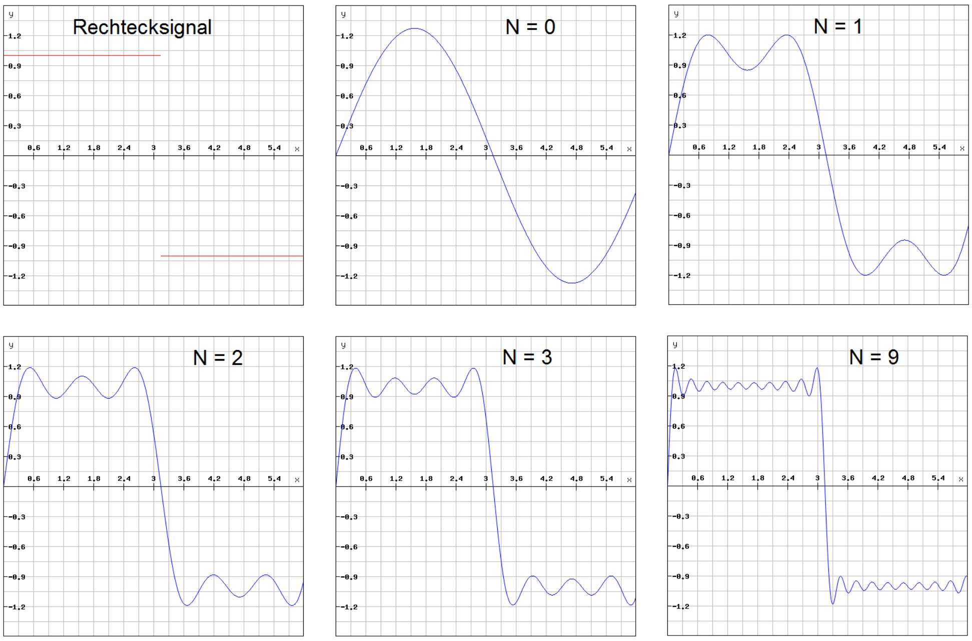

Abbildung 3: Rechtecksignal und die sukzessive Approximation durch die abgeschnittenen Fourier-Reihen mit $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ und $N = 9$. An den Sprungstellen der ursprünglichen Funktion bei $n\pi$ sind die approximierenden Funktionen stetig, die Unstetigkeiten ergeben sich erst im Limes.

Es gibt an den Sprungstellen, also den ganzzahligen Vielfachen von π, in den Approximationen eine stärkere Ungenauigkeit. Die Fourier-Reihe zittert sozusagen stärker in diesem Bereich. Dies wird auch Gibbs'sches Phänomen genannt, wobei sich das Überschwingverhalten quantifizieren lässt. Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens einer Fourier-Reihe ist also wichtig, und wird weiter unten noch genauer betrachtet.

2.1 Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe

Definition 2.5. Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen$f_n\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ oder auch $f_n\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{D}$ ein Intervall von $\mathbb{R}$ sei. Dann definieren wir wie folgt:

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent* gegen die Funktion f, falls

$$\forall x \in \mathbb{D},\, \varepsilon > 0 :\; \exists N \in \mathbb{N} :\; \forall n \geq N :\quad \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon\,;$$

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Funktion f, falls

$$\forall \varepsilon > 0 :\; \exists N \in \mathbb{N} :\; \forall x \in \mathbb{D},\, n \geq N :\quad \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon\,;$$

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent im quadratischen Mittel* gegen die Funktion f, falls

$$\big\|f_n - f\big\|_2 \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(vgl. für $\|\cdot\|_2$ auch Definition 3.1).