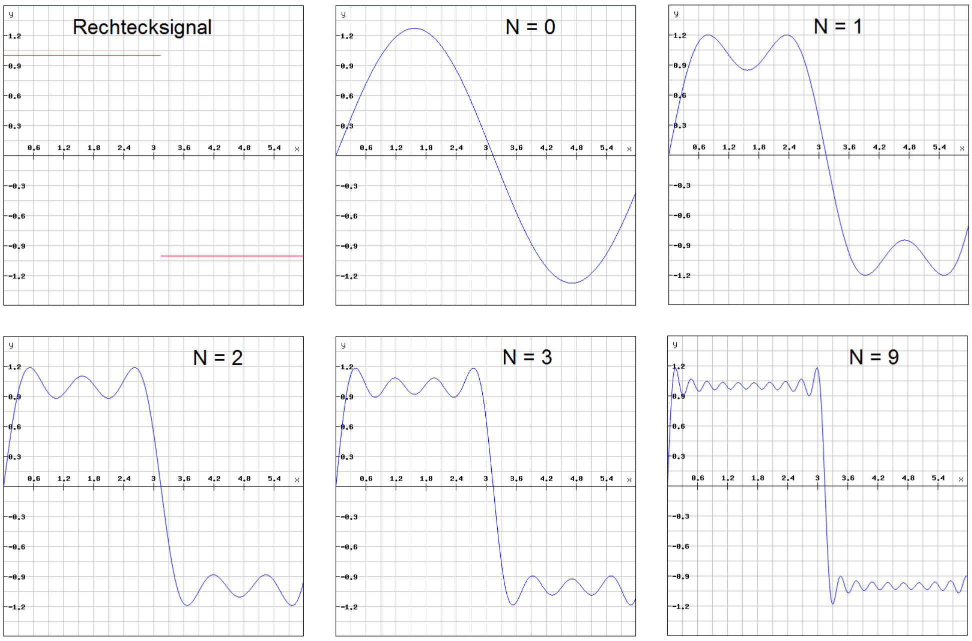

Abbildung 3: Rechtecksignal und die sukzessive Approximation durch die abgeschnittenen Fourier-Reihen mit $N = 0$, $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ und $N = 9$. An den Sprungstellen der ursprünglichen Funktion bei $n\pi$ sind die approximierenden Funktionen stetig, die Unstetigkeiten ergeben sich erst im Limes.

Es gibt an den Sprungstellen, also den ganzzahligen Vielfachen von π, in den Approximationen eine stärkere Ungenauigkeit. Die Fourier-Reihe zittert sozusagen stärker in diesem Bereich. Dies wird auch Gibbs'sches Phänomen genannt, wobei sich das Überschwingverhalten quantifizieren lässt. Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens einer Fourier-Reihe ist also wichtig, und wird weiter unten noch genauer betrachtet.

2.1 Konvergenzverhalten der Fourier-Reihe

Definition 2.5. Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen$f_n \colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ oder auch $f_n \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, wobei $\mathbb{D}$ ein Intervall von $\mathbb{R}$ sei. Dann definieren wir wie folgt:

(a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent* gegen die Funktion f, falls

$$\forall x \in \mathbb{D},\, \varepsilon > 0 :\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N :\ \ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon\,;$$

(b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Funktion f, falls

$$\forall \varepsilon > 0 :\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall x \in \mathbb{D},\, n \geq N :\ \ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon\,;$$

(c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent im quadratischen Mittel* gegen die Funktion f, falls

$$\big\|f_n - f\big\|_2 \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(vgl. für $\|\cdot\|_2$ auch Definition 3.1).

In einfachen Fällen lässt sich an der Fourier-Reihe direkt feststellen, ob gleichmäßige Konvergenz gegen die ursprüngliche Funktion f für $N \to \infty$ vorliegt.

Bemerkung 2.6. Ein hinreichendes Kriterium für gleichmäßige Konvergenz ist, dass die Koeffizienten der Fourier-Reihe schnell genug gegen 0 fallen. So z.B. für $|a_n|, |b_n| \leq \frac{c}{n^2}$ für eine Konstante $c > 0$, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Allerdings gibt es auch Fälle, bei denen dies nicht anwendbar ist, wie bei $\frac{1}{n}$, denn die harmonische Reihe divergiert bekanntlich. Ist jedoch f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und gilt zudem $|a_n|, |b_n| \leq \frac{c}{n}$ für eine Konstante $c > 0$, dann liegt wieder gleichmäßige Konvergenz vor.

Beispiel 2.7. Gegeben sei eine Funktion $f(x) = |x|$ für $[-\pi, \pi]$ mit 2π-periodischer Fortsetzung. Dies definiert eine stetige (!) Funktion, die oft als Dreiecks- oder Zick-Zack-Funktion bezeichnet wird. Die Fourier-Reihe dazu lautet:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

Es folgt, dass $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ eine Majorante der Fourier-Reihe ist und es gilt nach obigem Kriterium gleichmäßige Konvergenz.

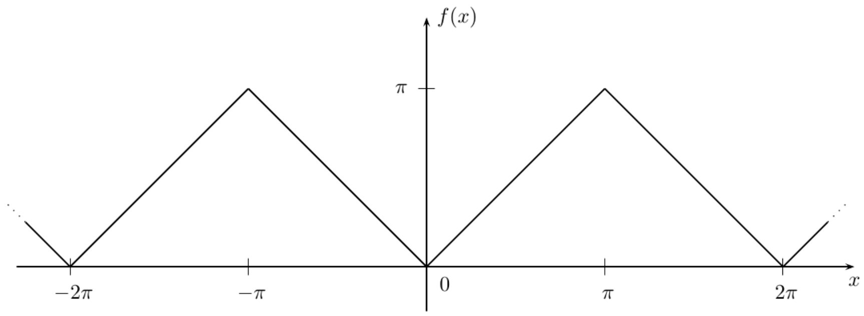

Abbildung 4: Verlauf des Dreieckssignals in einem kleinen Ausschnitt.

Im Allgemeinen benötigt man jedoch noch weitere Kriterien, von denen wir hier eines vorstellen wollen.

Definition 2.8. Eine Funktion f ist von *beschränkter Variation* auf einem Intervall $[a, b]$, wenn ein $M > 0$ existiert, so dass für jede Zerlegung

$$Z = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

des Intervalls gilt:

$$V(f, z) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| < M\,.$$

Jede monotone Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ist von beschränkter Variation, aber stetige Funktionen sind i.A. nicht von beschränkter Variation. Allgemein gilt, dass f genau dann von beschränkter Variation ist, wenn f als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen geschrieben werden kann. Mehr dazu findet man in vielen Lehrbüchern zur Analysis. Die Bedeutung ergibt sich aus folgendem Resultat.

Satz 2.9. *Sei f eine 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$. Ist f auf $[-\pi,\pi]$ von beschränkter Variation, so konvergiert die FR für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen den Wert*

$$s(x) = \frac{1}{2}\big(f(x^+) + f(x^-)\big).$$

wobei $f(x^+)$ bzw. $f(x^-)$ den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Limes an der Stelle x bezeichnet. Ist f in x stetig, dann liegt punktweise Konvergenz gegen $f(x)$ vor. Ist f auf $\mathbb{R}$ zusätzlich stetig, so konvergiert die FR gleichmäßig.

Auf diese Weise kann oft die starke Form der gleichmäßigen Konvergenz geprüft werden. Allerdings gibt es viele Fourier-Reihen, bei denen dies so nicht möglich ist bzw. keine gleichmäßige Konvergenz vorliegt. Um dennoch eine Aussage über das Verhalten der Fourier-Reihe für $N \to \infty$ bzw. der Approximation an die Funktion f zu treffen, gibt es schwächere Kriterien, z.B. ob die Fourier-Reihe (ggf. fast überall) punktweise konvergiert, oder ob sie im quadratischen Mittel konvergiert. Dazu später mehr in Kapitel 3.2.

2.2 Weiterentwicklung der Theorie der Fourier-Reihen

Für eine Weiterentwicklung der Theorie werden zunächst die Fourier-Koeffizienten etwas umgerechnet. Setze $a_{-n} = a_n$ und $b_{-n} = -b_n$ (somit ist $b_0 = 0$) und beachte, dass $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ gilt. Wir nehmen an, dass f eine gleichmäßig konvergente FR besitzt. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{a_n}{2}\big(e^{inx}+e^{-inx}\big) + \frac{b_n}{2i}\big(e^{inx}-e^{-inx}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{a_n+a_{-n}}{2} + \frac{b_n-b_{-n}}{2i}\Big)e^{inx} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\underbrace{\frac{1}{2}(a_n-ib_n)}_{=:\,c_n}e^{inx} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n e^{inx}. \end{aligned} \tag{19}$$

wobei

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\underbrace{\big(\cos(ns) - i\sin(ns)\big)}_{=e^{-ins}}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,\mathrm{d}s\,.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ins}e^{ims}\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)s}\,\mathrm{d}s \\
&= \begin{cases} m\neq n: \ \frac{e^{i(m-n)s}}{2\pi i(m-n)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi i(m-n)}\underbrace{\left(e^{i(m-n)\pi}-e^{-i(m-n)\pi}\right)}_{=0} \\ m=n: \ 1 \end{cases} \\
&= \delta_{m,n}\,.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis sieht wie ein Skalarprodukt aus. Um die neuen Koeffizienten c_n besser darzustellen, findet an dieser Stelle zunächst ein Einschub zum Dirac-Formalismus statt, um eine vorteilhafte Notation für Skalarprodukte zu erhalten.

Für das Beispiel des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ geht das so:

$$\begin{aligned}
&\text{Basis:} && e_1=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=|1\rangle,\ e_2=\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=|2\rangle \\
\langle x| = |x\rangle^t \quad &\text{also} && \langle 1|=(1,0),\ \langle 2|=(0,1) \\
\langle 1|1\rangle \quad &= && (1,0)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=1 && (20)\\
\langle 2|2\rangle \quad &= && (0,1)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=1 && (21)\\
\langle 1|2\rangle=\langle 2|1\rangle \quad &= && 0\,. && (22)
\end{aligned}$$

Dabei geben die Gleichungen (20) und (21) jeweils das Quadrat der Länge des Vektors an und (22) besagt, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Durch diese Regeln lässt sich die Vektor- und Matrixmultiplikation in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
|1\rangle\langle 1| &= \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)(1,0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \\
|2\rangle\langle 2| &= \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)(0,1) = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \\
(|1\rangle\langle 1|)^2 &= |1\rangle\langle 1\underbrace{|\,|}_{=|}1\rangle\langle 1| = |1\rangle\langle 1| \\
|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2| &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \mathbb{1}\,.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathbb{1}$ immer die Einheitsmatrix des entsprechenden Vektorraums. Es folgt eine Basisdarstellung für einen Vektor $v\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
v &= |v\rangle = \mathbb{1}|v\rangle = \big(|1\rangle\langle 1|+|2\rangle\langle 2|\big)|v\rangle = |1\rangle\underbrace{\langle 1|v\rangle}_{=v_1}+|2\rangle\underbrace{\langle 2|v\rangle}_{=v_2} \\
&= e_1\cdot v_1+e_2\cdot v_2 = \left(\begin{smallmatrix}v_1\\v_2\end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Die komplexe Form der Fourier-Reihe lässt sich nun folgendermaßen mit Hilfe des neuen Formalismus darstellen. Dabei gilt für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} |m\rangle &= |e^{imx}\rangle \\ \langle m|n\rangle &= \delta_{m,n} \\ \big(|n\rangle\langle n|\big)^2 &= |n\rangle \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1} \langle n| \;=\; |n\rangle\langle n|\,. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass die Funktion f als Vektor wie folgt aussieht:

$$|f\rangle \;=\; \sum_n c_n|n\rangle.$$

Daraus lässt sich nun die zuvor entwickelte Erweiterung herleiten:

$$\langle m|f\rangle \;=\; \langle m|\sum_n c_n|n\rangle \;=\; \sum_n c_n \underbrace{\langle m|n\rangle}_{=\delta_{m,n}} \;=\; c_m\,,$$

wobei wir die Rechenregeln für Skalarprodukte benutzt haben (s. nächstes Kapitel für eine kurze Wiederholung). Es bleibt aus der Summe nur der Term für $n = m$ bestehen und es ergibt sich für das Skalarprodukt $\langle m|f\rangle$ der Koeffizient c_m. Wird weiter angenommen, dass sich *jede* Funktion f auf diese Weise als (unendliche) Linearkombination darstellen lässt, mit $\{|m\rangle \mid m \in \mathbb{Z}\}$ als Basis (wir kommen später noch darauf zurück), dann folgt

$$|f\rangle \;=\; \underbrace{\Big(\sum_n |n\rangle\langle n|\Big)}_{=\mathbb{1}} |f\rangle \;=\; \sum_n |n\rangle\langle n|f\rangle \;=\; \sum_n \langle n|f\rangle\,|n\rangle \;=\; \sum_n c_n|n\rangle,$$

wobei wir über die passende Konvergenz später mehr sagen werden. Mit dieser Notation wird bei der Einführung von Hilbert-Räumen in Kapitel 3 Einiges systematischer, und das Rechnen etwas einfacher.

2.3 Vollständigkeit und Banach'sches Kontraktionsprinzip

Definition 2.10. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq 0\,, \quad \text{mit } d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \qquad \text{(Symmetrie)} \\ d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \quad \text{(Dreiecksungleichung).} \end{aligned}$$

(X, d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

Definition 2.11. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergent ist. Dabei heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folge*, falls gilt:

$$\forall\epsilon > 0 :\; \exists N \in \mathbb{N} :\; \forall m, n \geq N :\; d(a_n, a_m) < \epsilon\,.$$