Prof. Dr. Michael Baake
Dr. Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Wintersemester 2023/24
Bielefeld, 18.10.2023

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Übungsblatt 2

(5) Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem (AWP):

$$\begin{cases} c^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < \infty,\ c > 0,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{cases}$$

(a) Benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Formel

$$u(x,t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct),$$

die die allgemeine Lösung der Wellengleichung beschreibt, um f und g mit Hilfe der Funktionen ϕ und ψ darzustellen.

(b) Sei $G(x) := \int_0^x g(y)\,dy$. Stellen Sie ϕ und ψ mit Hilfe der Funktionen f und G dar.

(c) Benutzen Sie Teil (a) und (b), um zu zeigen, dass durch die folgende Formel die Lösung des obigen AWP gegeben ist:

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy.$$

(d) Seien $c = 1$, $f(x) = 2x^2$ und $g(x) = x$. Bestimmen Sie die Lösung des obigen AWP.

(1+2+1+2 Punkte)

(6) Bestimmen Sie die Fourier-Reihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(a) $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = x,$

(b) $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ g(x) = |x|.$

(Das heißt, dass die Funktionen f und g auf dem Intervall $(-\pi, \pi)$ wie oben definiert sind und dann 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden.) Wie sollten die Funktionen f und g sinnvollerweise an den Stellen $x = \pi(2n+1)$, mit $n \in \mathbb{Z}$, definiert werden?

Zeichnen Sie (Maple, Mathematica, Python...) den Graphen der partiellen Fourier-Reihen $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ für $n = 1, 2, 3$ und vergleichen Sie diese mit f bzw. g. **(3+3 Punkte)**

(7) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man nennt $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *Funktion von beschränkter Variation*, wenn

$$\sup_{\mathcal{Z}} \sum_{j=1}^{n-1} |f(x_{j+1}) - f(x_j)| < \infty,$$

wobei das Supremum über alle Unterteilungen

$$\mathcal{Z} = \{x_1, \ldots, x_n \,|\, a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

des Intervalls $[a, b]$ gebildet wird.

(a) Beweisen Sie eine der folgenden Behauptungen:

(i) f ist eine Funktion von beschränkter Variation, wenn f Lipschitz-stetig ist.

(ii) f ist eine Funktion von beschränkter Variation, wenn f monoton wachsend ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

nicht von beschränkter Variation ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilung: $\mathcal{Z} = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$.

(2+2 Punkte)

Abgabe Mittwoch, 25.10.2023, 12:00, im Postfach des Tutors