Prof. Dr. Michael Baake
Dr. Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Wintersemester 2023/24
Bielefeld, 25.10.2023

Mathematische Methoden der Biowissenschaften III

Übungsblatt 3

(8) Sei die 2π-periodische Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x + 1, & -\pi < x \leq 0, \\ -\frac{2}{\pi}x + 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f.

(b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten a_n und b_n von f und die zugehörige Fourier-Reihe.

(c) Bestimmen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von f und die zugehörige Fourier-Reihe.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

(1+2+1+1 Punkte)

(9) Überprüfen Sie die Funktionenreihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\big((2n-1)\,x\big)$$

auf punktweise, absolute und gleichmäßige Konvergenz.

(3 Punkte)

(10) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen, die auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert sind, linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind:

$$g(x) = 1, \quad s(x) = \sin(x), \quad c(x) = \cos(x).$$

Hinweis: Die Gleichung

$$\alpha g + \beta s + \gamma c = 0$$

bedeutet

$$\alpha g(x) + \beta s(x) + \gamma c(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [-\pi, \pi].$$

Wenn man nun geeignete Werte für x wählt...

(2 Punkte)

(11) Es bezeichne $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ den Vektorraum *aller stetigen* und 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Setze

$$\langle f \mid g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

für alle $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f \not\equiv 0$ in der größeren Menge *aller* 2π-periodischen Funktionen gibt mit $\langle f \mid f \rangle = 0$.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge

$$S := \{1\} \cup \{\sqrt{2} \cdot \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sqrt{2} \cdot \sin(nx) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ein Orthonormalsystem (ONS) ist, d.h.

$$\langle f \mid f \rangle = 1 \quad \text{und} \quad \langle f \mid g \rangle = 0$$

für alle $f, g \in S$ mit $f \neq g$.

(2+2+2 Punkte)

Abgabe Dienstag, 31.10.2023, 16:00, im Postfach des Tutors