

Lineare Differentialgleichungen

$$\boxed{\dot{x} = ax} \quad \text{wird gelöst von} \quad x(t) = x_0 e^{at}$$

Das ist die allgemeine Lösung, denn:

Sei y eine Lösung, und betrachte $z(t) = e^{-at} y(t)$.

Dann ist

$$\dot{z}(t) = -a z(t) + e^{-at} \underbrace{\dot{y}(t)}_{= a y(t)} = 0$$

$$\Rightarrow z(t) = \text{const.} = z(0) = y_0 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{at}$$

Folgerung: Das AWP $\dot{x} = ax, x(t_0) = x_0$ besitzt die eindeutige Lösung $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$ (Spezialfall von Picard-Lindelöf) $\square$

Umschreiben als Integralgleichung:

$$\int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau = x(t) - x(t_0) = a \cdot \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + a \int_{t_0}^t x(\tau) d\tau} \quad (\text{Volterra})$$

(Ex) $t_0 = 0, x_0 = 1, a = 1$

Picard-Iteration:

$$x^{(0)} \equiv 1, \quad x^{(n+1)}(t) = x^{(n)}(0) + \int_0^t x^{(n)}(\tau) d\tau$$

Das liefert:

$$x^{(1)} = 1 + t$$

$$x^{(2)} = 1 + t + \frac{1}{2} t^2$$

$\vdots$

$$x^{(n)} = \sum_{m=0}^n \frac{t^m}{m!}$$

(Bew.: Induktion)

$$\Rightarrow x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(t) = \underline{\underline{e^t}}$$

Folgerung: e^t ist als Lsg. von $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$ eindeutig definiert!

Jetzt: $\boxed{\dot{x} = a(t) x}$ (homogen)

$$\leadsto x(t) = x_0 \cdot \exp \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$$

$$\boxed{\dot{x} - a(t) x = g}$$
 (inhomogen)

$$\leadsto x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^t \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} a(\sigma) d\sigma \right) g(\tau) d\tau \right) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right)$$

(per "Variation der Konstanten")

Mit Vektoren in $\mathbb{R}^d$:

$$\boxed{\dot{x} = A x} \quad \leadsto x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 \quad (A \text{ konst.})$$

FUSY: Lösung für $x_0 \in \{e_1, e_2, \dots, e_d\}$

$$\Rightarrow x(t) = X(t) \cdot x_0, \quad \boxed{\dot{X} = A X, \quad X(t_0) = \mathbb{1}}$$

$$\Rightarrow X(t) = \exp((t-t_0)A)$$

eindeutig! (wie bei $d=1$)

Ziel: $\dot{X} = A(t) X, \quad X(t_0) = \mathbb{1}$

1. Fall: $[A(t), A(s)] = 0$

$$\leadsto X(t) = \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \quad (\text{Rechnung wie bei } d=1)$$

2. Fall: $[A(t), A(s)] \neq 0$

$\leadsto$ Problem! ∇

Warum ist das wichtig? Reduktion!

$$(*) \quad x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

Gleichung
n-ter Ordnung

Setze:

$$\begin{aligned} x_1 &:= x \\ x_2 &:= \dot{x} = \dot{x}_1 \\ x_3 &:= \ddot{x} = \dot{x}_2 \\ &\vdots \\ x_n &:= x^{(n-1)} = \dot{x}^{(n-2)} \end{aligned}$$

und:

$$\dot{x}_n = x^{(n)} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(**) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ f(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

System
n-ter Ordnung

Satz: x Lsg. von $(*) \Rightarrow (x_1, \dots, x_n)^T$ Lsg. von $(**)$
 $\Rightarrow x = x_1$ n-mal diffbar & Lsg. von $(*)$

(Ex) $\ddot{x} + x = 0$

$$x_1 = x; \quad x_2 = \dot{x} \quad \hookrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = -\frac{1}{1}, \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow x_1(t) = x_1(0) \cdot \cos(t) + x_2(0) \cdot \sin(t)$$

$\hookrightarrow$ Lineare Systeme als natürlicher Rahmen!

$$\boxed{\dot{x} = A(t)x + b(t)}, \quad [A(t), A(s)] = 0, \quad x(t_0) = x_0$$

Satz: Sind A und b stetig in J , mit $t_0 \in J$,
so besitzt das AWP die eindeutige Lösung

$$x(t) = e^{G(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-G(\tau)} b(\tau) d\tau \right)$$

mit $G(t) = \int_{t_0}^t A(s) ds$. Dies gilt in ganz J .

Bem.: Kommutator benötigt für Beweis von

$$\frac{d}{dt} \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = A(t) \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$$

(nachrechnen!)

Also jetzt allgemein:

$$\boxed{\dot{X} = A(t)X, \quad X(t_0) = \mathbb{1}}$$

$W(t) := \det(X(t))$: Wronski-Determinante

A stetig
 $\rightarrow$

$$\boxed{\dot{W}(t) = \text{Spur}(A(t)) \cdot W(t)}$$

(vgl. Walter)

$$\Rightarrow W(t) = W(t_0) \cdot \underbrace{\exp \left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(\tau)) d\tau \right)}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow W(t) \equiv 0 \quad \vee \quad W(t) \neq 0 \quad \forall t$$

Verbleibendes Problem: Wie bekommt man $X(t)$?

(Erinnerung LAP 2:

$$e^{A+B} \quad \text{für } [A, B] = 0$$

BCH-Formel)

Peano-Baker-Reihe

(A stetig auf J)

Volterra: $X(t, t_0) = \mathbb{1} + \int_{t_0}^t A(\tau) X(\tau, t_0) d\tau$

Picard-Iteration liefert:

$$\begin{aligned} X(t, t_0) &= \mathbb{1} + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots \\ &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t) \end{aligned}$$

mit

$$I_n(t) = \int_{t_0}^t A(\tau_1) \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} A(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_2 d\tau_1$$

Als Iteration:

$$\boxed{I_0(t) \equiv \mathbb{1}, \quad I_{n+1}(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) I_n(\tau) d\tau} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Lemma: Die I_n sind wohldefiniert, diffbar, und erfüllen $\dot{I}_{n+1}(t) = A(t) I_n(t)$, $t \in J$, $n \in \mathbb{N}_0$

Bew.: Induktion, mit "Hauptsatz Infini"
+ nachrechnen per MWS Integralrechnung. $\square$

Lemma: Ist $\|A(t)\|$ lokal integrierbar auf J, so konv. die PB-Reihe für $X(t, t_0)$ kompakt auf J bzgl. $\|\cdot\|$ (eine Matrixnorm)

Bew.: Cauchy-Eigenschaft nachrechnen, mittels Submultiplikativität von $\|\cdot\|$.

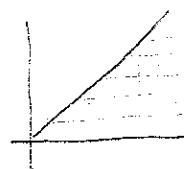
Bem.:

(6)

- $X(t_0, t_0) = \mathbb{1} \Rightarrow X(t, t_0)^{-1} \text{ ex. } \forall t \text{ (Wronski!)}$
- Inhomogene Gl. lösbar $\forall$
- Flusseigenschaft: $\boxed{X(t, s) X(s, t_0) = X(t, t_0)}$
- $X(t, t_0)^{-1} = X(t_0, t) \quad (\nabla)$
- $\dot{x} = Ax + b$
 $\leadsto x(t) = X(t, t_0) \left(x_0 + \int_{t_0}^t X(t_0, \tau) b(\tau) d\tau \right)$
- $[A(t), A(s)] = 0 \Rightarrow X(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$

Betrachten wir $I_2(t)$ im allgemeineren Fall:

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_1) A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 & (\text{stets: } \tau_1 \geq \tau_2) \\ &= \int_{t_0}^t \int_{\tau_2}^{\tau_1} A(\tau_1) A(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{t_0}^t \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} A(\sigma_2) A(\sigma_1) d\sigma_2 d\sigma_1 \end{aligned}$$



Setze nun: $\boxed{:A(t) A(s):} = \begin{cases} A(t) A(s), & t \geq s \\ A(s) A(t), & s > t \end{cases}$

Damit:

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \underbrace{A(\tau_1) A(\tau_2)}_{=: A(\tau_1) A(\tau_2):} d\tau_2 d\tau_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{\tau_1}^t \underbrace{A(\tau_2) A(\tau_1)}_{=: A(\tau_1) A(\tau_2):} d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t :A(\tau_1) A(\tau_2): d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned}$$

Def. 1 : $A(t)A(s)$ heißt zeitgeordnetes Produkt von $A(t)$ und $A(s)$. Allgemeiner:

$$: A(t_1) A(t_2) \cdots A(t_n) :$$

$$:= A(t_{\pi(1)}) A(t_{\pi(2)}) \cdots A(t_{\pi(n)})$$

für eine (egal welche!) Permutation π mit $t_{\pi(1)} \geq t_{\pi(2)} \geq \cdots \geq t_{\pi(n)}$

Lemma: Für $n \geq 2$: $I_n(t) = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \cdots \int_{t_0}^t : A(t_1) \cdots A(t_n) : dt_1 \cdots dt_n$
(nachrechnen!)

Def. 2: Dyson-Reihe oder zeitgeordnetes Exponential:

$$: \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau : = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} : \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^n :$$

$$\text{mit } : \mathbb{1} : = \mathbb{1}, \quad : A(t) : = A(t)$$

$$: A+B : = : A : + : B :$$

$$: \int A(\tau) d\tau : = \int : A(\tau) : d\tau \quad \text{etc.}$$

Folgerung: Das zeitgeordnete Produkt

$: \exp \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau :$ ist das FUSY für $\dot{x} = Ax$

mit Anfangsbed. bei t_0 . Es stimmt mit der PB-Reihe überein!

Bem. Mit der PB-Reihe kann man es (numerisch) berechnen.