

Beweis :

$T$  symmetrisch  $\rightarrow T \subset T^*$

Noch z.z. :  $D(T^*) \subset D(T)$ .

Sei  $\psi \in D(T^*)$ . Da  $R(T-i) = \mathcal{H}$ ,  $\exists \varphi \in D(T)$  mit  $(T-i)\varphi = (T^*-i)\psi$

$$\varphi \in D(T) \Rightarrow T\varphi = T^*\varphi \rightsquigarrow (T-i)\varphi = (T^*-i)\varphi = (T^*-i)\psi$$

$$\Rightarrow \psi - \varphi \in \ker(T^*-i)$$

$$T \text{ dicht def} \rightarrow \psi - \varphi \in \ker(T^*-i) = R(T+i)^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$$

$$\Rightarrow \psi = \varphi \in D(T).$$

Beispiele :  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

(a) Ortsoperator

$$(Q\psi)(x) = x\psi(x), \quad \psi \in D(Q)$$

$$D(Q) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : x \mapsto x\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \stackrel{!}{=} L^2(\mathbb{R})\}$$

$$\bullet \sigma(Q) = \sigma_c(Q) = \mathbb{R}$$

Beweis :

$$\text{Ang. } \lambda \in \sigma_p(Q), \exists \psi \in D(Q) \setminus \{0\}$$

$$Q\psi = \lambda\psi \Rightarrow (x-\lambda)\psi(x) = 0 \text{ fast überall}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = 0 \text{ fast überall} \quad \text{⌋}$$

Für festes  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei

$$\varphi(x) := \mathbb{1}_{[\lambda-1, \lambda+1]}(x) \Rightarrow \varphi \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\text{Falls es } \psi \text{ gibt mit } (Q-\lambda)\psi = \varphi \rightsquigarrow \psi(x) = \frac{1}{x-\lambda}$$

für fast alle  $x \in [\lambda-1, \lambda+1]$

$$\Rightarrow \psi \notin L^2(\mathbb{R})$$

$Q$  ist selbstadjungiert

Beweis : übung! (den vorigen Satz anwenden)

## ⑥ Impulsoperator

$$(P\psi)(x) := -i\hbar\psi'(x), \quad \psi \in D(P)$$

$$D(P) = W^{2,1} := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \psi' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$$\bullet \sigma(P) = \sigma_c(P) = \mathbb{R}$$

Beweis:

mittels Fourier-Transformation!

$$P = \hbar F G F^{-1} \Rightarrow p(P) = \hbar p(G) := \{\hbar\lambda : \lambda \in p(G)\}$$

$$\psi \text{ EV zu } G \text{ zum EW } \lambda \rightsquigarrow F\psi \text{ EV zu } P \text{ zum EW } \hbar\lambda$$

$$\Rightarrow \sigma(P) = \sigma_c(G) = \mathbb{R}$$

•  $P$  ist selbstadjungiert

( $F, F^{-1}$  Isomorphismen von  $L^2(\mathbb{R})$  + vorigen Satz)

## Der Spektralsatz und die stochastische Interpretation

Def.  $P \in \mathcal{L}(H)$  heißt orthogonale Projektion falls  
 $P = P^2 = P^*$ .

Def: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen (z.B.  $\Omega = \sigma(T)$ ),  $\mathcal{B}(\Omega)$ : Borel- $\sigma$ -Algebra.

$E: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  heißt Spektralschar/projektorwertiges Maß falls gilt

①  $E(A)$  ist orthogonale Projektion ( $\forall A \in \mathcal{B}(\Omega)$ )

②  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\Omega)$  paarweise disjunkt

$$\Rightarrow \left(E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right)\psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)\psi$$

③  $E(\Omega) = \text{id}_H$

Bem: Sei  $\psi \in H$ . Dann ist  $\mu_\psi: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$\mu_\psi(A) := \langle E(A)\psi | \psi \rangle = \|E(A)\psi\|^2 \quad (A \in \mathcal{B}(\Omega))$$

ein endliches Maß mit  $\mu_\psi(\Omega) = \|\psi\|^2$  (also falls  $\|\psi\|=1$  ist  $\mu_\psi$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß!)

Def (Integral einer Stufenfunktion bzgl.  $E$ )

Sei  $E: \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  eine Spektralschar und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = \sum_{i=1}^n f_i \mathbb{1}_{A_i}$  eine (komplexwertige) Stufenfunktion. Dann heißt

$$\int f dE := \sum_{i=1}^n f_i E(A_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

das Integral von  $f$  bzgl.  $E$ .

Es sei jetzt  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine messbare Funktion.

Definiere

$$D\left(\int f(\lambda) dE(\lambda)\right) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) < \infty \right\}.$$

Satz

- ① Für alle  $\psi \in D\left(\int f(\lambda) dE(\lambda)\right)$  existiert eine Folge von Stufenfunktionen  $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f_n \rightarrow f$  punktweise und  $\int |f_n - f|^2 d\mu_\psi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , und der Operator

$$\int f(\lambda) dE(\lambda) : \mathcal{H} \supset D\left(\int f dE\right) \rightarrow \mathcal{H}$$

$$\psi \mapsto \left(\int f(\lambda) dE(\lambda)\right)\psi := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n(\lambda) dE(\lambda)\right)\psi$$

ist wohldefiniert.

- ② Der Operator  $\int f(\lambda) dE(\lambda)$  ist abgeschlossen, dicht definiert und normal. Falls  $f$  reellwertig ist, ist  $\int f(\lambda) dE(\lambda)$  selbstadjungiert.

- ③ Es gilt

$$\left\| \int f(\lambda) dE(\lambda) \psi \right\|^2 = \int |f(\lambda)|^2 d\mu_\psi(\lambda) = \int |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\psi\|^2 \quad (\psi \in \mathcal{H}).$$

Insbesondere ist  $\int \lambda dE(\lambda)$  selbstadjungiert für jede Spektralschar  $E$  falls  $\Omega \subset \mathbb{R}$ .

Umkehrung: Spektralsatz!

## Satz (Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjung. Operatoren)

Sei  $T: \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  ein selbstadjungierter Operator.

Dann existiert genau eine (!) Spektralschar  $E: \mathcal{B}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  mit

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$$

Für jede messbare  $f: \sigma(T) \rightarrow \mathbb{C}$  wird durch

$$f(T) := \int_{\sigma(T)} f(\lambda) dE(\lambda)$$

$$D(f(T)) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} : \int_{\sigma(T)} |f(\lambda)|^2 d\mu_{\psi}(\lambda) < \infty \right\}$$

ein normaler Operator definiert.

Funktionalkalkül:

$$(1) \quad (f(T))^* = \overline{f}(T)$$

$$(2) \quad f(T) + g(T) \subset (f+g)(T)$$

$$(3) \quad f(T)g(T) \subset (fg)(T)$$

Bemerkung:

$$(a) \quad f(\lambda) := 1 \quad \forall \lambda \in \sigma(T) \quad \rightsquigarrow \quad \int 1 dE(\lambda) = f(T) = E(\sigma(T)) = \text{id}_{\mathcal{H}}$$

„Resolution der Identität“

$$(b) \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } T \iff E(\{\lambda\}) = 1$$

Eigenraum zu  $\lambda$ :  $R(E(\lambda))$

Zurück zur Quantenmechanik!

$T: \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  : Observable mit Spektralschar  $E$

$\psi \in D(T)$  : reiner Zustand

$$\langle T \rangle_{\psi} = \langle \psi | T \psi \rangle = \int \lambda d\mu_{\psi}(\lambda) : \text{Erwartungswert von } T \text{ im Zustand } \psi$$

$$(\Delta T)_{\psi} := \sqrt{\text{var}_{\psi} T} : \text{Unschärfe von } T \text{ im Zustand } \psi$$

$$\text{wobei } \text{var}_{\psi}(T) := \underbrace{\langle \psi | (T - \langle T \rangle_{\psi} \text{id}_{\mathcal{H}})^2 \psi \rangle}_{(4)} = \int (\lambda - \langle T \rangle_{\psi})^2 d\mu_{\psi}(\lambda)$$

Satz: Die zur Ortsobservable  $Q$  gehörende Spektralschar ist gegeben durch

$$E(A)\psi := \mathbb{1}_A \psi \quad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \psi \in L^2(\mathbb{R}))$$

Damit gilt  $\|E(A)\psi\|^2 = \int_A |\psi(x)|^2 dx$ , d.h.  $|\psi(x)|^2$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $^A$  für den Aufenthaltsort.

Beweis:

Man rechnet leicht direkt nach, dass  $E: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$  eine Spektralschar ist.  
 $A \mapsto \mathbb{1}_A$

Setze  $\tilde{Q} := \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) \leadsto \tilde{Q}$  ist selbstadj.!

Sei  $\psi \in D(\tilde{Q}) = \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int |\lambda|^2 d\|E(\lambda)\psi\|^2 < \infty \}$ .

Wähle eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Stufenfunktionen auf, welche monoton & punktweise gegen  $x \mapsto x^2$  konvergiert

$$(f_n = \sum_{k=1}^{N_n} c_{kn} \mathbb{1}_{A_{kn}})$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) |\psi(x)|^2 dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \mathbb{1}_{A_{kn}}(x) dx \quad (\text{Def. von } f_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N_n} \|E(A_{kn})\psi\|^2 \quad (\text{Def. der Schar } E(A))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(\lambda) d\|E(\lambda)\psi\|^2 \quad (\text{Funktionalkalkül für Stufenfunktionen})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\|E(\lambda)\psi\|^2 \quad (\text{Folgt aus der Konvergenz } f_n \rightarrow f, \quad f: x \mapsto x^2)$$

$\Rightarrow \psi \in D(\tilde{Q})$  g.d.w.  $\psi \in D(Q)$ .

Für  $\psi \in D(\tilde{Q})$ ,  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  gilt:  $\int_{\mathbb{R}} x \psi(x) \bar{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\lambda)\psi, \varphi \rangle$

$\leadsto \langle Q\psi | \varphi \rangle = \langle \tilde{Q}\psi | \varphi \rangle \Rightarrow Q\psi = \tilde{Q}\psi \Rightarrow Q = \tilde{Q}$ .

$\leadsto E$  ist die Spektralschar zu  $Q \leadsto \|E(A)\psi\|^2 = \|\mathbb{1}_A \psi\|^2 = \int_A |\psi(x)|^2 dx$   
 (15)