

Spektrale Teilräume eines selbstadjungierten Operators

- $T : \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$: selbstadjungiert
- $E(\cdot)$: Spektralschar

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_{pp}(T) \oplus \overbrace{\mathcal{H}_{sc}(T)}^{\mathcal{H}_c(T)} \oplus \mathcal{H}_{ac}(T)$$

Notation : $\mathcal{H}_\alpha := \mathcal{H}_\alpha(T)$ (von T abhängig!)

Erinnerung : $\mu_\psi(\cdot) = \langle \psi | E(\cdot) \psi \rangle = \|E(\cdot)\psi\|^2$: positives Maß
($\psi \in \mathcal{H}$)

allgemeiner gilt

$$\mu_{\varphi, \psi} := \langle \varphi | E(\cdot) \psi \rangle = \frac{1}{4} [\mu_{\varphi+\psi} - \mu_{\varphi-\psi} + i\mu_{\varphi-i\psi} - i\mu_{\varphi+i\psi}]$$

($\varphi, \psi \in \mathcal{H}$)

: komplexes Maß

$$\mu_{\varphi, \psi} = (\mu_{\varphi, \psi})_{pp} + (\mu_{\varphi, \psi})_{sc} + (\mu_{\varphi, \psi})_{ac}$$

Spektrale Teilräume : abstrakte Definition

Def : Der bezüglich T unstetige Teilraum $\mathcal{H}_{pp}$ ist die abgeschlossene lineare Hülle der Eigenelemente von T .

Das orthogonale Komplement von $\mathcal{H}_{pp}$ bezeichnet man als der bezüglich T stetigen Teilraum $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_{pp}^\perp$ (also ebenfalls abgeschlossen).

Satz :

(a) $\psi \in \mathcal{H}_{pp} \iff$ das Maß μ_ψ auf abzählbar viele Punkte konzentriert ist, d.h., $\exists$ eine abzählbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit

$$\mu_\psi(A) = \mu_\psi(\mathbb{R}) = \|\psi\|^2 \quad \text{bzw.} \quad \mu_\psi(\mathbb{R} \setminus A) = 0.$$

(b) $\psi \in \mathcal{H}_c \iff$ jeder Punkt von $\mathbb{R}$ (und daher jede abzählbare Menge von $\mathbb{R}$) eine μ_ψ -Nullmenge ist.

Beweis

(a) $\psi \in H_{pp} \Rightarrow \exists \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ (abzählbar viele) und zugehörige, paarweise orthogonale Eigenvektoren ψ_n mit $\psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \psi_n$, $\|\psi\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\|^2$

Für $A = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ gilt dann

$$\mu_\psi(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\psi(\{\lambda_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|E(\{\lambda_n\})\psi\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\psi_n\|^2 = \|\psi\|^2 = \mu_\psi(\mathbb{R})$$

Sei $\leftarrow : A = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Menge mit $\mu_\psi(A) = \|\psi\|^2$

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\{s_n\})\psi \right\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|E(\{s_n\})\psi\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_\psi(\{s_n\}) = \mu_\psi(A) = \|\psi\|^2$$

$$\Rightarrow \left\| \psi - \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\{s_n\})\psi \right\|^2 = \|\psi\|^2 - \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\{s_n\})\psi \right\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(\{s_n\})\psi$$

Wegen $E(\{s_n\})\psi \in \ker(T - s_n) \subset H_{pp}$, ist somit $\psi \in H_{pp}$.

(b) $\psi \in H_c = H_{pp}^\perp$

Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist $E(\{s\})\psi \in H_{pp} = H_c^\perp$, also

$$\mu_\psi(\{s\}) = \|E(\{s\})\psi\|^2 = \langle \psi | E(\{s\})\psi \rangle = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

μ_ψ σ -additiv $\Rightarrow \mu_\psi(A) = 0$ für jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$.

$\leftarrow : \mu_\psi(\{s\}) = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$

z.z.: ψ ist orthogonal zu jedem Eigenelement von T

Sei φ : Eigenvektor zu λ , mit $\|\varphi\| = 1$.

für $\Rightarrow P_\varphi := \langle \varphi | \cdot \rangle \varphi$ gilt $P_\varphi \leq E(\{\lambda\})$ und somit

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \|P_\varphi \psi\|^2 \leq \|E(\{\lambda\})\psi\|^2 = \mu_\psi(\{\lambda\}) = 0$$

Prop.

- (1) $\mathcal{H}_{sc} := \{ \psi \in \mathcal{H}_c : \exists \text{ Lebesgue-Nullmenge } N \text{ mit } E(N)\psi = \psi \}$
 $\stackrel{!}{=} \{ \psi \in \mathcal{H}_c : \mu_\psi \text{ ist singular bzgl. dem Lebesguemaß} \}$
- (2) $\mathcal{H}_{ac} \stackrel{!}{=} \{ \psi \in \mathcal{H}_c : \mu_\psi \text{ ist absolut stetig bzgl. dem Lebesguemaß} \}$
wobei $\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_{sc}^\perp$

Außerdem sind beide Unterräume $\mathcal{H}_{sc}$ & $\mathcal{H}_{ac}$ abgeschlossen.

Beweis: Siehe [Satz 12.2 & Satz 12.3, J. Weidmann: Lin. Op. in Hilberträumen II]

Im folgenden seien P_α die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_\alpha$,
wobei $\alpha \in \{pp, c, sc, ac\}$.

Satz

- (a) Die Spektralschar E ist mit den Projektionen P_α vertauschbar,
d.h. die Teilräume $\mathcal{H}_\alpha$ reduzieren T .

- (b) Sei $T_\alpha := T|_{\mathcal{H}_\alpha}$ (wieder selbstadjungiert!)

$$\sigma_{pp}(T) := \sigma(T_{pp})$$

$$\sigma_{ac}(T) := \sigma(T_{ac})$$

$$\sigma_{sc}(T) := \sigma(T_{sc})$$

$$\sigma_c(T) := \sigma(T_c)$$

alle abgeschlossenen
Teilmenge von $\mathbb{R}$

Satz: Der Laplace-Operator $-\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$ hat kein absolut stetiges
Spektrum (d.h., $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac}(-\Delta)$) mit $\sigma(-\Delta) = \sigma_{ac}(-\Delta) = [0, \infty)$

Beweis: z.z.: Für jedes $\psi \in L^2(\mathbb{R}^m)$, $\mu_\psi = \|E(\cdot)\psi\|^2$ ist absolut stetig bzgl.
des Lebesguemaßes.

Wegen $-\Delta = \mathcal{F}^{-1} M_{|\cdot|^2} \mathcal{F}$ & Spektralschar für $M_{|\cdot|^2}$: Multiplikation mit
 $\uparrow$ Norm in $\mathbb{R}^m$ $\mathbb{1}_{\{|\cdot|^2 \in A\}}$

$$\Rightarrow \|E(A)\psi\|^2 = \|\mathcal{F}^{-1} \mathbb{1}_{\{|\cdot|^2 \in A\}} \mathcal{F}\psi\|^2 = \|\mathbb{1}_{\{|\cdot|^2 \in A\}} \mathcal{F}\psi\|^2$$

$$= \int_{\{|\cdot|^2 \in A\}} |\mathcal{F}\psi(x)|^2 dx = C_m \int_{\{r^2 \in A\}} \int_{\omega \in S^{m-1}} |\mathcal{F}\psi(r\omega)|^2 d\omega dr = \int_{\{r \in A^{1/2}\}} |\tilde{f}(r)|^2 dr$$

mit $\tilde{\psi}(r) = \left\{ C_m r^{m-1} \int_{S^{m-1}} |\psi(rw)|^2 dw \right\}^{1/2}$ und $A^{1/2} = \{r \geq 0 : r^2 \in A\}$.

Da $\tilde{\psi} \in L^2([0, \infty))$ gilt und $A^{1/2}$ eine Nullmenge ist, falls A eine Nullmenge ist, folgt die absolute Stetigkeit von μ_ψ .

Spektrale Teilräume: dynamische Charakterisierung

Def. Ein Element $\psi \in \mathcal{H}$ heißt ein stationärer Zustand bzgl. T , wenn für jeden selbstadjungierten Operator $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ der Erwartungswert $B_\psi(t) := \langle e^{-itT} \psi | B e^{-itT} \psi \rangle$ konstant ist.

Satz: $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ stationär bzgl. T

$\iff \psi$ ein Eigenvektor von T .

Beweis: siehe [J. Weidmann, Lin. Op. in HR II, Satz 12.7]

Folgerung: $\mathcal{H}_{pp} = \underline{\text{abg. lin. Hülle}}$ der bzgl. T stationären Zustände.

Im folgenden sei $\{\mathcal{H}_r\}$ eine wachsende Schar von abgeschlossenen Teilräumen des HR $\mathcal{H}$ mit $\bigcup_r \mathcal{H}_r = \mathcal{H}$ & P_r : orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_r$
($P_r \rightarrow \text{id}_{\mathcal{H}}$)

(z.B., $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{H}_r = L^2(|x| \leq r)$)

Def (Gebundene & Streuzustände)

(a) $\psi \in \mathcal{H}$ heißt gebundener Zustand (bzgl. T und der Schar $\{\mathcal{H}_r\}$), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $r_0 = r_0(\psi)$ gibt mit
$$\| (I - P_{r_0}) e^{-itT} \psi \| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) $\psi \in \mathcal{H}$ heißt Streuzustand (bzgl. T und der Schar $\{\mathcal{H}_r\}$) wenn für jedes r gilt
$$P_r e^{-itT} \psi \rightarrow 0 \quad \text{für } |t| \rightarrow \infty$$

(c) $\psi \in \mathcal{H}$ heißt Streuzustand im zeitlichen Mittel (bzgl. T und der Schar $\{\mathcal{H}_r\}$) wenn für jedes r gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_{-M}^M \| P_r e^{-itT} \psi \|^2 dt = 0 \quad (19)$$

Physikalische Deutung:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^m)$$

$$\mathcal{H}_r = L^2(|x| < r)$$

- ψ gebunden $\Rightarrow$ das/die Teilchen für alle Zeiten mit Wahrscheinlichkeit beliebig nahe bei 1 in einer (hinreichend großen) Kugel bleibt
- ψ Streuzustand $\Rightarrow$ das/mindestens ein Teilchen für $|t| \rightarrow \infty$ jede Kugel endgültig verlassen wird
- ψ Streuzustand $\Rightarrow$ das/mindestens ein Teilchen für große Zeitintervalle jede Kugel im zeitlichen Mittel verlassen wird.
im zeitl. Mittel

Notation:

$\mathcal{H}^{(b)}$: Menge der geb. Zustände

$\mathcal{H}^{(s)}$: " " Streuzustände

$\tilde{\mathcal{H}}^{(s)}$: " " Streuzustände im zeitlichen Mittel

Bemerkung:

$$\mathcal{H}^{(s)} \subset \tilde{\mathcal{H}}^{(s)}, \quad \tilde{\mathcal{H}}^{(s)} \perp \mathcal{H}^{(b)}$$

• $\mathcal{H}^{(b)}, \mathcal{H}^{(s)}, \tilde{\mathcal{H}}^{(s)}$ sind abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$ (Beweisidee: $\varepsilon\delta$ -Argument!)

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{H}_{pp} \subset \mathcal{H}^{(b)} & \left[\begin{array}{l} \text{es genügt z.z. jedes Element gebunden ist (wegen Abgeschlossenheit)} \\ \text{Sei } \psi: \text{Eigenvektor zu } \lambda, \varepsilon > 0. \\ \exists r \text{ mit } \|(I - P_r)\psi\| \leq \varepsilon \\ \Rightarrow \|(I - P_r)e^{-itT}\psi\| = \|(I - P_r)e^{-it\lambda}\psi\| = \|(I - P_r)\psi\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \psi \in \mathcal{H}^{(b)} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Für ein endliches komplexes Borel-Maß μ in $\mathbb{R}$ definiere

$$\hat{\mu}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d\mu(\lambda)$$

Insbesondere gilt:

μ stetig $\Leftrightarrow$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_{-M}^M |\hat{\mu}(t)|^2 dt = 0$$

Lemma von Wiener:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_{-M}^M |\hat{\mu}(t)|^2 dt = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\mu(\{\lambda\})|^2$$

(20)

Satz (RAGE-Theorem)

Sei T ein selbstadjungierter Operator mit Spektralschar E im Hilbertraum $\mathcal{H}$, $\{\mathcal{H}_r\}$ eine wachsende Schar von abgeschlossenen Teilräumen mit $\bigcup_r \mathcal{H}_r = \mathcal{H}$. Für jedes r und jedes beschränkte Intervall $J \subset \mathbb{R}$ sei $P_r E(J)$ kompakt. Dann gilt:

(a) $\mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}^{(cs)}$

(b) $\mathcal{H}_c = \widetilde{\mathcal{H}}^{(cs)}$ und $\mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}^{(c)}$.

Beweis

(a) Wir beweisen die etwas allgemeinere Aussage:

- $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$
- $BE(J)$ kompakt für jedes beschränkte $J \subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow B e^{-itT} \psi \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty \text{ und } \psi \in \mathcal{H}_{ac}$$

Beh.: $\psi \in \mathcal{H}_{ac} \Rightarrow \mu_{\psi, \psi}$ ist absolut stetig bzgl. Lebesguemaßes, $\forall \varphi \in \mathcal{H}$

$$|\mu_{\varphi, \psi}(A)| = |\langle \varphi | E(A) \psi \rangle| \leq \underbrace{|\langle \varphi | E(A) \varphi \rangle|^{1/2}}_{\text{c.s.}} |\langle \psi | E(A) \psi \rangle|^{1/2} = \mu_{\varphi}(A)^{1/2} \cdot \mu_{\psi}(A)^{1/2}$$

$$\langle \varphi | e^{-itT} \psi \rangle = \int e^{-i\lambda t} d\mu_{\varphi, \psi}(\lambda) = \int e^{-i\lambda t} \underbrace{f_{\varphi, \psi}(\lambda)}_{\in L^1(\mathbb{R})} d\lambda \equiv \widehat{f_{\varphi, \psi}}(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$$

(Riemann-Lebesgue lemma!)

Da φ beliebig war: $e^{-itT} \psi \rightarrow 0$ für $|t| \rightarrow \infty$

Da $BE(J)$ kompakt und $[E(A), T] = 0$: $B e^{-itT} E(J) \psi = (BE(J)) e^{-itT} \psi \rightarrow 0$ für $|t| \rightarrow \infty$
für jedes beschränkte Intervall J .

Wegen $E(-n, n) \psi \rightarrow \psi$ ($n \rightarrow \infty$) und Beschränktheit von B

$$\Rightarrow B e^{-itT} \psi \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0.$$

(b) Es genügt $H_c \subset \tilde{H}^{(s)}$ zu zeigen. (Warum?)
Zusammen mit

$$\tilde{H}^{(s)} \perp H^{(b)} \quad \& \quad H_{pp} \subset H^{(b)}$$

$$\Rightarrow H_c = H_{pp}^\perp \supset (H^{(b)})^\perp \supset \tilde{H}^{(s)} \quad \Rightarrow H_c = \tilde{H}^{(s)}$$

z.z. $R(E(J)P_c) \subset \tilde{H}^{(s)}$ für jedes beschränkte Intervall J .

Da $\tilde{H}^{(s)}$ abgeschlossen & $E(-n, n) \rightarrow \text{id}_H$ folgt damit:

$$H_c = R(P_c) \subset \tilde{H}^{(s)}$$

Sei $\psi \in R(E(J)P_c)$. (d.h. $\exists \psi' \in R(P_c)$ mit $\psi = E(J)\psi' = E(J)^2\psi'$)

$P_r E(J)$ kompakt $\Rightarrow \exists$ orthonormale Folgen $(e_j), (e'_j)$ & eine Nullfolge (λ_j) mit

$$(P_r E(J))\psi = \sum \lambda_j \langle e'_j | \psi \rangle e_j \quad \left[\begin{array}{l} \text{Spektralsatz} \\ \text{für komp. Operatoren!} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \|P_r e^{-itT} \psi\|^2 = \|P_r E(J) e^{-itT} \psi\|^2 = \sum_j \underbrace{|\lambda_j|^2 |\langle e'_j | e^{-itT} \psi \rangle|^2}_{(*)}$$

Lemma von Wiener:

$$\Rightarrow \frac{1}{M} \int_{-M}^M \underbrace{|\langle e'_j | e^{-itT} \psi \rangle|^2}_{\widehat{\mu}_{e'_j, \psi}(t)} dt \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow \infty)$$

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert ein j_0 mit $|\lambda_j|^2 \leq \varepsilon \quad \forall j \geq j_0$ und somit

$$\sum_{j \geq j_0} |\lambda_j|^2 |\langle e'_j | e^{-itT} \psi \rangle|^2 \leq \varepsilon \|e^{-itT} \psi\|^2 = \varepsilon \|\psi\|^2$$

$$\text{also: } \frac{1}{M} \int_{-M}^M \|P_r e^{-itT} \psi\|^2 dt = \underbrace{\frac{1}{M} \int_{-M}^M \sum_{j < j_0} (*) dt}_{\rightarrow 0 \text{ für } M \rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{M} \int_{-M}^M \sum_{j \geq j_0} (*) dt}_{\leq \varepsilon \|\psi\|^2 \quad \forall M}$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon \|\psi\|^2 \Rightarrow \psi \in \tilde{H}^{(s)}$$