

Def.: Für $g \in L^1(\mathbb{R})$ heißt

$$h(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \cdot g(x) dx \quad (*)$$

die Fourier-Transformierte von g .

Bem.: • Wegen $|e^{-ixy}| = 1$ ist auch $e^{-ixy} g(x) \in L^1(\mathbb{R})$.

$$• \|g\|_1 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx$$

Satz: Sei $g \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ex. die FT $h(y)$ gemäß $(*)$ für alle $y \in \mathbb{R}$; sie ist eine glm. stetige, beschränkte Funktion, und es gilt

$$\|h\|_{\infty} = \sup_x |h(x)| \leq \|g\|_1.$$

Bew.: Für bel., aber fester $y \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto e^{-ixy} g(x)$ messbar und integrierbar, also ex. $h(y)$. Die Beschränktheit folgt so:

$$|h(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|e^{-ixy} g(x)|}_{= |g(x)|} dx = \|g\|_1 < \infty.$$

Für die glm. Stetigkeit betrachten wir:

$$\begin{aligned} |h(y+\eta) - h(y)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |e^{-ixy} (e^{-ix\eta} - 1)| \cdot |g(x)| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{|x| \leq M} + \int_{|x| > M} \right) \underbrace{|e^{-ix\eta} - 1|}_{\leq 2} \cdot |g(x)| dx \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hängt nicht von y ab.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle M so, dass $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>M} 2 |g(x)| dx < \varepsilon$.
(gilt wegen $g \in L^1(\mathbb{R})$).

Da $2 |g(x)|$ den Integranden dominiert und $|e^{-ixz} - 1| \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ p.w. für alle $|x| \leq M$, folgt
 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \leq M} |e^{-ixz} - 1| \cdot |g(x)| dx \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$ (dom. konv.)

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists z = z(\varepsilon) : |h(y+z) - h(y)| < 2\varepsilon, \forall y$
 $\Rightarrow$ glm. Stetigkeit. □

Sinnvolle Notation:

$f \in L^1(\mathbb{R}) \quad \curvearrowright \quad \hat{f}$ als FT

Lemma: $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ (Linearität)

Bew.: klar.

Prop.: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(a) \quad g(x) = e^{i\alpha x} \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(y) = \hat{f}(y - \alpha)$$

$$(b) \quad g(x) = f(x - \alpha) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(y) = e^{-i\alpha y} \cdot \hat{f}(y)$$

Bew.: $\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{i\alpha x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(y-\alpha)} f(x) dx$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x - \alpha) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-izy} \cdot f(z) dz \cdot e^{-i\alpha y}$$
□

(Ex)

$$f(x) = e^{-\alpha x^2/2}, \quad \alpha > 0.$$

Dann ist

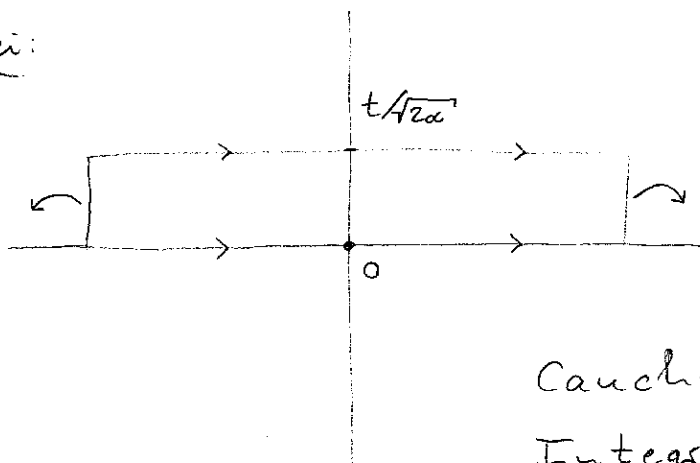
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha \frac{x^2}{2} - itx\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-y^2 - ity\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right) dy$$

$$= \frac{e^{-t^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(y + i\frac{t}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2\right) dy}_{= \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{e^{-t^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$$

Dabei:



Cauchy'scher
Integralsatz!

Also: $f(x) = e^{-x^2/2}$ ist invariant unter FT.

Was bedeutet das?

kleine Wdh.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = I = ? \quad (\text{sicher } I > 0)$$

Das geht so:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr \quad (\text{Polarkoordinaten})$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r \cdot e^{-r^2} dr \quad \text{Subst.: } s = r^2, ds = 2r dr$$

$$= \pi \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-s} ds}_{=1} = \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \sqrt{\pi}}$$

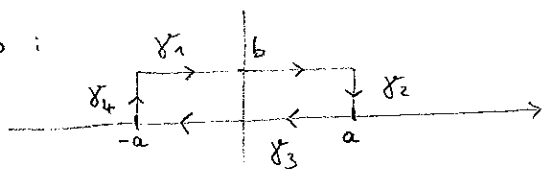
Erweiterung: f holomorph $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$
für geschlossene Wege γ . (Satz von Cauchy)

Wie ist das zu lesen?

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ Weg, dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_I f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

Also:



$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} e^{-z^2} dz = 0$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

Dabei ist:

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_{-a}^a e^{-(\tau+ib)^2} d\tau$$

$$\int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz = \int_0^b e^{-(-a+i\tau)^2} i d\tau$$

Dabei ist dann:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz \right| &\leq \int_0^b \underbrace{\left| e^{-(-a+i\tau)^2} \right|}_{= |e^{-a^2} \cdot e^{+2ia\tau} \cdot e^{-\tau^2}|} d\tau \leq b \cdot e^{b^2} \cdot e^{-a^2} \\ &= e^{-a^2} \cdot e^{\tau^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz \right| = 0$$

Also alles zusammen:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz &= \int_{-a}^a e^{-(\tau+ib)^2} d\tau \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\tau+ib)^2} d\tau \\ &\parallel \\ - \underbrace{\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz}_{\rightarrow 0} &= \underbrace{\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz}_{= \int_{-a}^a e^{-\tau^2} d\tau} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

für $a \rightarrow \infty$

Also:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+ib)^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

($b \in \mathbb{R}$)

Prop.: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\lambda > 0$. Dann gilt:

$$(a) \quad g(x) := f(-x) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(y) = \hat{f}(-y)$$

$$(b) \quad g(x) := \overline{f(-x)} \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(y) = \overline{\hat{f}(y)}$$

$$(c) \quad g(x) := f(x/\lambda) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(y) = \lambda \cdot \hat{f}(\lambda y)$$

Bew.: Einsetzen & nachrechnen - Übung! $\square$

Satz: Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, und $g(x) := -ix \cdot f(x)$.
Falls $g \in L^1$, so ist $\hat{f}$ diffbar, und es gilt:

$$\frac{d}{dy} \hat{f}(y) = \hat{g}(y)$$

Bew.: $\frac{1}{\varepsilon} (\hat{f}(y+\varepsilon) - \hat{f}(y)) =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} (e^{-i\varepsilon x} - 1) e^{-iyx} f(x) dx$$

Nun ist $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (e^{-i\varepsilon x} - 1) = -ix, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

und:

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} (e^{-i\varepsilon x} - 1) \right| = \dots = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon |x|} \left(2 \cdot (1 - \cos(\varepsilon |x|)) \right)^{1/2}}_{\leq 1 \quad (!)} \cdot |x|$$

Damit ist der Integrand von $|g(x)|$ dominiert
dom. konv.

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \hat{f}(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\hat{f}(y+\varepsilon) - \hat{f}(y))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (e^{-i\varepsilon x} - 1) e^{-iyx} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} \underbrace{(-ix) f(x)}_{= g(x)} dx = \hat{g}(y). \quad \square$$

Nochmal: $f(x) = e^{-x^2/2}$, $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\tilde{x}} e^{-\tilde{x}^2/2} d\tilde{x}$

Beh.: $\hat{f}(x) = f(x)$

Bew.: $f(x)$ erfüllt die Dgl.

$$f'(x) + x \cdot f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = 1.$$

Nach Picard-Lindelöf gibt es nur eine Lösung des AWP!

Betrachte nun

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{x}^2/2} d\tilde{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = 1$$

und:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \hat{f}(x) &\stackrel{\text{Satz}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \tilde{x}} e^{-\tilde{x}^2/2} (-i\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \frac{+i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \tilde{x}} \cdot \frac{d}{d\tilde{x}} e^{-\tilde{x}^2/2} d\tilde{x} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left[e^{-ix \cdot \tilde{x}} \cdot e^{-\tilde{x}^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{x}^2/2} \cdot e^{-ix \cdot \tilde{x}} \cdot (-ix) d\tilde{x} \\ &= -x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix \cdot \tilde{x}} e^{-\tilde{x}^2/2} d\tilde{x} = -x \cdot \hat{f}(x) \end{aligned}$$

Also löst $\hat{f}(x)$ dasselbe AWP,

somit ist $\hat{f}(x) = f(x)$. □

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx \quad (8)$$

Satz: (Riemann-Lebesgue-Lemma)

Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$\hat{f}(x) \longrightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Bew.: Betr. $1_{[a,b]}(x)$, die char. Fktn. von $[a,b]$,

$$\begin{aligned} \text{mit } \hat{1}_{[a,b]}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} 1_{[a,b]}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-itx} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi} \cdot t} (e^{-itb} - e^{-ita}) \end{aligned}$$

$$\leadsto |\hat{1}_{[a,b]}(t)| = O\left(\frac{1}{|t|}\right) \quad \text{für } |t| \rightarrow \infty.$$

Wegen der Linearität der FT gilt dies dann auch für jede Treppenfunktion (= endl. LK von char. Fktn.) - die in L^1 dicht sind.

$$\leadsto \forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Trfkt. } f_\varepsilon : \|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\hat{f}(t)| &\leq |\hat{f}_\varepsilon(t)| + \underbrace{|\hat{f}(t) - \hat{f}_\varepsilon(t)|}_{\leq \|f - f_\varepsilon\|_1} < |\hat{f}_\varepsilon(t)| + \varepsilon \\ &\leq \|f - f_\varepsilon\|_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\hat{f}(t)| \leq \varepsilon + \underbrace{\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\hat{f}_\varepsilon(t)|}_{=0} = \varepsilon$$

Nun war $\varepsilon > 0$ bel., so dass folgt

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\hat{f}(t)| = 0.$$

□

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx \quad (9)$$

Faltungssatz: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R})$, und es gilt

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad (f * g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x-\xi) g(\xi) d\xi$$

Bew.: $f * g \in L^1$ wie früher! Sei $h = f * g$.

Dann ist:

$$\hat{h}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} h(x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \int_{\mathbb{R}} f(x-\xi) g(\xi) d\xi dx$$

$$\text{(Fubini)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} g(\xi) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-it(x-\xi)} f(x-\xi) dx}_{= \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(y) dy} d\xi$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} g(\xi) d\xi \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(y) dy \right)$$

$$= \hat{f}(t) \cdot \hat{g}(t) \quad \square$$

Bem.: - wichtiges Hilfsmittel

- Umkehrung?

Dirac-Folgen (approximierende 1)

Sei φ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger, $\varphi \geq 0$, und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$.
Setze

$$\varphi_n(x) := n \cdot \varphi(nx) \quad (n \geq 1).$$

Dann ist: $\varphi_1 = \varphi$; $\varphi_n \geq 0$; $\text{supp}(\varphi_n) = \frac{1}{n} \cdot \text{supp}(\varphi)$
und

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(nx) d(nx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1.$$

Lemma: Sei f beschränkt und messbar, und auf der kompakten Menge A stetig.

Dann gilt $\varphi_n * f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ glm. auf A .
(hier ohne Faktoren)

Bew.: $x \in A \leadsto (\varphi_n * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) f(x-y) dy$

aber auch:

$$f(x) = f(x) \cdot 1 = f(x) \cdot \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi_n(y) dy$$

$$\Rightarrow (\varphi_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) (f(x-y) - f(x)) dy = (*)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $\delta > 0$ mit
 $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$ für $|y| < \delta$ (!) $\left. \begin{array}{l} \text{dazu muss} \\ \text{nicht} \\ \overline{B_\delta(x)} \subset A \\ \text{gelten!} \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow |(*)| \leq \underbrace{\int_{|y| < \delta} \varphi_n(y) \cdot \varepsilon dy}_{= \varepsilon} + \underbrace{\int_{|y| \geq \delta} \varphi_n(y) |f(x-y) - f(x)| dy}_{\leq 2 \cdot \|f\|_{\infty} \cdot \text{vol}(\text{supp}(\varphi_n) \cap \{|y| \geq \delta\})}$$

$$= 0 \quad (\text{für } n \text{ groß genug})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n * f)(x) = f(x).$$

für alle $x \in A$, punktweise.

Sei nun $x \in A$ bel. Da A kompakt, haben wir relativ glm. Stetigkeit von f auf A , also ex. für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass $\forall x \in A$:

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \text{ mit } |y| < \delta.$$

$\Rightarrow$ glm. konv. auf A . □

Bem.: Ist $A = \{x\}$, so gilt das Lemma an dieser Stelle!

b.w.

Wir haben $\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx$
für $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Falls nun auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, kann man dann f "zurückgewinnen"?

Ansatz:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \hat{f}(t) dt$$

↑
glm. stetige L^1 -Fktn.

Heuristik:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} f(y) dy dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{it(x-y)} dt \right)}_{"=\delta(x-y)"} f(y) dy \stackrel{②}{=} f(x)$$

Bem.:

Die Überlegungen gelten auch für allgemeine Dirac-Folgen:

$$(D1) \quad \varphi_n \geq 0, \quad \forall n$$

$$(D2) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x) dx = 1$$

$$(D3) \quad \forall \varepsilon, \delta > 0: \exists n_0: \forall n \gg n_0:$$

$$\int_{|x| \geq \delta} \varphi_n(x) dx < \varepsilon$$

Dabei ersetzt (D3) die Eigenschaft mit dem komp. Träger.

$$(Ex) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \varphi_n(x) = n \cdot \varphi(nx)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1$$

Rest klar (Details: Übung)

Bem.: Mit (D3) modifiziert man den Bew. des obigen Lemmas im letzten Schritt der Abschätzung.

Bessere Idee (für f stetig):

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_{\varepsilon}(x-y) f(y) dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\delta_{\varepsilon} * f)(x) \stackrel{(\text{Lemma})}{=} f(x) \quad (\varepsilon \hat{=} \frac{1}{n})$$

Umkehrsatz

Satz: Seien f und $\hat{f}$ in $L^1(\mathbb{R})$, sowie

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{+itx} \hat{f}(t) dt.$$

Dann ist g ^(glm.) stetig, verschwindet für $|x| \rightarrow \infty$,
und es gilt $\hat{f}(x) = g(x)$ (f.ü.).

Bew.: $g(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$, somit Stetigkeit
und Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$ klar.

Sei $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ und $\varphi_n(x) := n \cdot \varphi(nx)$,

also $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\widehat{\varphi(x/n)} = \varphi_n(x) = \varphi_n(-x)$

Nun ist g stetig, also $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n * g)(x)$,
mit glm. konv. auf kompakten.

Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x/n) = \varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f * \varphi_n - f\|_1 = 0 \quad (\text{Bew.: Übung}) \rightarrow$$

(Treppenf. & 3ε)

und somit ex. eine Teilfolge (φ_{n_i}) mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (f * \varphi_{n_i})(x) = f(x) \quad (\text{f.ü.})$$

(Fundamentalsatz)

$$\|f * \varphi_n - f\|_1$$

$$\leq \underbrace{\| (f - \psi_\varepsilon) * \varphi_n \|_1}_{\leq \|f - \psi_\varepsilon\|_1 < \varepsilon \text{ (Fubini)}} + \underbrace{\| \psi_\varepsilon * \varphi_n - \psi_\varepsilon \|_1}_{< \varepsilon \text{ für } n \text{ groß genug}} + \underbrace{\| f - \psi_\varepsilon \|_1}_{< \varepsilon} < 3\varepsilon$$

Treppenfunktion
↓

Nun gilt aber auch:

$$\begin{aligned}
 (f * \varphi_n)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi_n(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt dy \\
 &\stackrel{\text{(Fubini)}}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x-y)} f(x-y) dy}_{\stackrel{(!)}{=} \hat{f}(t)} e^{itx} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{\varphi\left(\frac{t}{n}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \hat{f}(t) dt \xrightarrow[\text{(dom. Konv.)}]{n \rightarrow \infty} f(x)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

□

Folgerung: Ist $f \in L^1$ mit $\hat{f}(t) \equiv 0$,
so gilt $f(x) = 0$ (f.ü.).

Bew.: Da $\hat{f} \equiv 0$, ist $\hat{f} \in L^1$, und
 $f(x) \stackrel{\text{f.ü.}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot \hat{f}(t) dt = 0.$

□

Def.: $\mathcal{A}(\mathbb{R}) := \{ \hat{f} \mid f \in L^1(\mathbb{R}) \}$

Prop.: $\mathcal{A}(\mathbb{R}) \subsetneq C_0(\mathbb{R})$
 $\uparrow$ Algebra $\uparrow$ Banach-Algebra, ohne 1

Bew.: " $\subset$ " klar, wegen Stetigkeit & RLL.

" $\neq$ ": $C_0(\mathbb{R})$ enthält nicht nur glm. stetige Fktn.

□

Bem.: Die genaue Char. von $A(\mathbb{R})$ ist schwierig, viele Aspekte werden immer noch untersucht.

→ Wir suchen "schönere" Räume.

Ziel: $L^2(\mathbb{R})$: Hilbert-Raum! $\langle f|g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$

Problem: λ kein endl. Maß $\Rightarrow L^2 \not\subset L^1$

→ Betrachte $L^1 \cap L^2$ (dicht in L^2 !)
(Argument: Treppenf.)

Satz: Man kann jeder Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ eine Funktion $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ so zuordnen, dass gilt:

$$(a) f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx$$

$$(b) f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

(c) $f \mapsto \hat{f}$ ist ein isometr. Hilbert-Raum-Isomorphismus von $L^2(\mathbb{R})$ auf sich selbst, also unitär.

(d) Es gelten die Relationen:

$$\|\hat{f} - \widehat{1_{[-A,A]} \cdot f}\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

$$\|f - \widehat{1_{[-A,A]} \cdot \hat{f}}\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0$$

$$(\text{mit } \check{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ixy} g(y) dy)$$

Bem.: Da $L^1 \cap L^2$ dicht in L^2 (klar - s.o.) ist, legt dies die Trf. auf L^2 eindeutig fest.
Sie heißt auch Fourier-Plancherel-Trf.

$$\frac{1}{1+|x|} : \text{ in } L^2, \text{ aber nicht in } L^1$$

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} : \text{ in } L^1, \text{ aber nicht in } L^2$$

Bew.: $L^2(\mathbb{R})$ ist ein Hilbert-Raum mit
Skalarprodukt $\langle f | g \rangle := \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx$;
 $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f | f \rangle}$.

Sei $\tilde{f}(x) := f(-x)$, und $g(x) := (f * \tilde{f})(x)$, $f \in L^1 \cap L^2$.
Dann ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y) \cdot f(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(y)} \cdot f(x+y) dy = \langle f | T_{-x} f \rangle \end{aligned}$$

(mit $T_t f(x) := f(x-t)$).

Dabei ist $t \mapsto T_t f$ stetige Abb. von $\mathbb{R}$ in den L^2 ,
also $x \mapsto \langle f | T_{-x} f \rangle$ stetig wegen Eigenschaft des
Skalarprodukts, und somit g stetig.

Weiter:

(C.S.)

$$|g(x)| = |\langle f | T_{-x} f \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|T_{-x} f\|_2 = \|f\|_2^2$$

$\leadsto g$ beschränkt, und zudem in L^1 (da $f, \tilde{f} \in L^1$).

Nun ist (mit φ_n wie oben):

$$\|f\|_2^2 = g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g * \varphi_n)(0) \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow \infty}} \right\} \text{wieder Faltungssatz rückwärts!}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \underbrace{\varphi\left(\frac{t}{n}\right)}_{\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \underbrace{\hat{g}(t)}_{=(f * \tilde{f})^\wedge = \sqrt{2\pi} |\hat{f}|^2} dt \Big|_{x=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt \end{aligned}$$

(mon. konv.)

$$= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 dt = \|\hat{f}\|_2^2$$

$$\Rightarrow \hat{f} \in L^2 \quad \text{und} \quad \underbrace{\langle f | f \rangle = \langle \hat{f} | \hat{f} \rangle}.$$

$\leadsto$ Parseval'sche Formel.

Setze $Y := \{ \hat{f} \mid f \in L^1 \cap L^2 \}$

$\Rightarrow Y \subset L^2(\mathbb{R})$ nach vorigem Argument.

Beh.: Y ist dicht in L^2 , d.h. $Y^\perp = \{0\}$.

Sei $\varphi(x_n)$ wie oben. Dann ist $e^{i\alpha x} \cdot \varphi(x_n) \in L^1 \cap L^2$,
für bel. $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{i\alpha x} \varphi(x_n) dx = \varphi_n(t-\alpha) = \varphi_n(\alpha-t) \in Y.$$

Ist $w \in Y^\perp$, so folgt

$$\begin{aligned} \langle w | \varphi_n(\alpha - \cdot) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \bar{w}(\xi) \cdot \varphi_n(\alpha - \xi) d\xi = 0 \\ &= (\bar{w} * \varphi_n)(\alpha) \end{aligned}$$

Nun ist auch:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \| \bar{w} * \varphi_n - \bar{w} \|_1 &= 0 \quad \Rightarrow \bar{w} = 0 \text{ (f.ü.)} \\ &\Rightarrow w = 0 \text{ (f.ü.)} \end{aligned}$$

Sei $\tilde{F}(f) := \hat{f}$ für $f \in L^1 \cap L^2$, also $\tilde{F}(L^1 \cap L^2) = Y$,
und $g \in L^2$. Wähle $f_n \in L^1 \cap L^2$, $(\uparrow \text{ beide dicht!})$
so dass $\tilde{F}(f_n) \rightarrow g$ (möglich!)

$\Rightarrow (\tilde{F}(f_n))$ ist Cauchy, also auch (f_n) , da $\tilde{F}$ auf $L^1 \cap L^2$ eine Isometrie ist $\Rightarrow f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ex., da $L^2(\mathbb{R})$ vollständig. Dann setzt man $g := \tilde{F}(f)$, und erhält so die benötigte Erweiterung auf L^2 , die surj. ist. Sie erfüllt (a) und (b), und ist wieder Isometrie (!)

Wegen $\| f - 1_{[-a,a]} \cdot f \|_2 \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0$

folgen die Approximationsaussagen nun aus der Isometrieeigenschaft. □

Folgerung: Für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\langle \mathcal{F}(f) | \mathcal{F}(g) \rangle = \langle f | g \rangle$$

Bew.: $4 \langle f | g \rangle = \underbrace{\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2}_{= \|\hat{f} + \hat{g}\|^2 \text{ etc.}} - i \|f+ig\|^2 + i \|f-ig\|^2$
 $= 4 \langle \mathcal{F}(f) | \mathcal{F}(g) \rangle.$ $\square$

Satz: Ist $f \in L^1$ und $\hat{f} \in L^2$, so gilt:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} \hat{f}(y) dy \quad (\underline{f.ü.})$$

Bew.: $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, $\mathcal{F}$ ist L^2 -Isometrie, also

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixy} \hat{f}(y) dy$$

$\uparrow$
im L^2 -Sinne,
d.h. f.ü.

 $\square$

Bem.: $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}(t)$ fix für alle t
 $f \in L^2 \Rightarrow \mathcal{F}(f)$ def. im L^2 -Sinne,
 $\hat{f}(t)$ nur bestimmt für
fast alle $t \in \mathbb{R}$.

Satz: Auf $L^2(\mathbb{R})$ gilt $\boxed{\mathcal{F}^4 = \text{Id}}$.

Bew.: Für $f \in L^2$ bekommen wir nach vorigem Satz
 $f(-x) \stackrel{f.ü.}{=} \mathcal{F}^2(f)(x)$, also $\mathcal{F}^4 f = f$ im L^2 -Sinne,
und somit $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$. $\square$

Folgerung: $\sigma(\mathcal{F}) \subset \{1, i, -1, -i\}$

Bew.: $\mathcal{F}(f) = \lambda f \Rightarrow \lambda^4 = 1 \Rightarrow \text{Beh.}$
 $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$ $\square$

Basis in $L^2(\mathbb{R})$?

Setze $h_0(x) = \varphi(x) = e^{-x^2/2}$, und

$$h_n(x) := e^{x^2/2} \cdot \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$$

Dann ist $h_n(x) = H_n(x) \cdot e^{-x^2/2}$ mit

$$H_0 \equiv 1, \quad H_1 = -2x, \quad H_{n+1}(x) = -2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$

Lemma:

$$\mathcal{F}(h_n) = (-i)^n \cdot h_n$$

Bew.: Übung

Lemma: $\phi_n(x) := \frac{h_n(x)}{(2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi})^{1/2}}$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ bildet ein VONS, also

$$(1) \quad \langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{nm}$$

$$(2) \quad \sum_{n \geq 0} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \mathbb{1} \quad \text{auf } L^2(\mathbb{R})$$

$$(3) \quad \mathcal{F}(\phi_n) = (-i)^n \cdot \phi_n$$

Bew.: (3) ist klar, Normierung in (1) eine Rechenübung. Für Orthogonalität nimmt man einen selbstadj. Operator auf $L^2(\mathbb{R})$, N , der $N(\phi_n) = (n + \frac{1}{2}) \cdot \phi_n$ erfüllt. (Alt.: Übung)
Vollst. klar wegen Weierstraß.

(nur Skizze)

□

→ Bezug zum harmonischen Oszillator der QM ∇

Folgerung: Auf $L^2(\mathbb{R})$ gilt:

$$\boxed{\mathcal{F} = \sum_{n \geq 0} |\phi_n\rangle (-i)^n \langle \phi_n|}$$

□

(Darstellung als Diagonalmatrix !)

Betrachten wir das Quadrat:

$$\mathcal{F}^2 = \sum_{m, n \geq 0} |\phi_n\rangle (-i)^n \underbrace{\langle \phi_n | \phi_m \rangle}_{=\delta_{nm}} (-i)^m \langle \phi_m|$$

$$= \sum_{n \geq 0} |\phi_n\rangle (-1)^n \langle \phi_n|$$

↑ abwechselnd gerade
und ungerade

↪ vgl. mit $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ (!)

$$\text{und } f(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2} (f(x) - f(-x))$$

Ebenso:

$$\mathcal{F}^4 = \dots = \sum_{n \geq 0} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \mathbb{1} \quad \checkmark$$

Folgerung:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

$$\text{mit } V_\ell = \{ f \in L^2 \mid \mathcal{F}^2 f = (-i)^\ell \cdot f \},$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \oplus \mathcal{F}_3, \quad \mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{V_i},$$

ist orthogonale Zerlegung.

□