

Fourier-Transformation & PDEs

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F} &= F : f \mapsto \hat{f} \\ \mathcal{F}^2 &= \mathcal{R} \\ \mathcal{F}^3 &= F\mathcal{R} = F^{-1} \\ \mathcal{F}^4 &= F^2\mathcal{R} = \mathcal{R}^2 = \text{id} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{gilt auf } L^1(\mathbb{R}) \\ \text{ \& } L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

(wobei $\mathcal{R} : x \mapsto -x$)

$$\text{Notation: } \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(k) dk$$

$$(\check{\check{f}})(x) = f(x)$$

Auf $L^2(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ikx} \hat{f}(k) dk, \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}$$

FT & Ableitungen

$$\hat{f}'(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx$$

$$\stackrel{\text{P.I.}}{=} \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} f(x) e^{-ikx} \Big|_{-a}^a}_{=0, \text{ falls } f(x) \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty} + \underbrace{\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a (ik) e^{-ikx} f(x) dx}_{ik \hat{f}(k)}$$

$$= (ik) \hat{f}(k)$$

• gilt auch für $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^2(\mathbb{R})$

(Approximation mit Funktionen in $C_c^\infty(\mathbb{R})$)

↪ glatt, mit kompaktem Träger

• In $\mathbb{R}^n$ gilt $\hat{f}^{(\alpha)}(k) = (ik)^\alpha \hat{f}(k)$

für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ mit $f^{(\alpha)} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

(partielle) Ableitung in $\mathbb{R}^n \rightsquigarrow$ Multiplikation in $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$
 $\Rightarrow$ geeignet für lineare PDEs mit konstanten Koeffizienten!

Strategie:

- Fourier-Transformation auf eine lineare PDE (für u) anwenden
- Neue Gleichung für $\hat{u}$ lösen
- Fourier-Inversion nutzen ($\check{\hat{u}} = u$), um u zurückzugewinnen

Beispiele

(1) Bessel-Potential

$$-\Delta u + u = -u'' + u = f, \text{ mit } f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow F(u'') + F(u) = F(f)$$

$$|k|^2 \hat{u} + \hat{u} = \hat{f}$$

$$(1 + |k|^2) \hat{u} = \hat{f} \Rightarrow \hat{u} = \frac{\hat{f}}{1 + |k|^2} = \hat{f} \cdot \left(\frac{1}{1 + |k|^2} \right)$$

$$\check{\hat{u}} = \hat{f} \cdot \left(\frac{1}{1 + |k|^2} \right) \rightsquigarrow u = \frac{f * B}{\sqrt{2\pi}}, \text{ mit } \hat{B}(k) = \frac{1}{1 + |k|^2}$$

Ansatz: $\frac{1}{a} = \int_0^\infty e^{-ta} dt, a > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + |k|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1 + |k|^2)} dt$$

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{ikx - t|k|^2} dk}_{= e^{-x^2/4t} \sqrt{\frac{\pi}{t}}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t - \frac{|x|^2}{4t}}}{\sqrt{t}} dt$$

- radial symmetrisch
- $\hat{B}(k) \rightarrow 0, |k| \rightarrow \infty$
- $\hat{B}(k) \in L^1(\mathbb{R})$

$$u(x) = \frac{f * B}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t - \frac{|x-y|^2}{4t}}}{\sqrt{t}} f(y) dy dt$$

$B(x)$: Bessel-kern (zum Operator $(1-\Delta)^{-1}$)
 $[(1-\Delta)u = f \Rightarrow \underline{u = (1-\Delta)^{-1}(f)}]$

- Es gibt Verallgemeinerungen für $d > 1$ & $(1-\Delta)^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$
- Warum Bessel?

$$B_\alpha(x) = \frac{1}{2^{(\alpha-2)/2} \sqrt{2\pi} \cdot \Gamma(\alpha/2)} \cdot \underbrace{k_{(\alpha-2)/2}(|x|)}_{\substack{\text{modif. Bessel-Funktion} \\ \text{2. Art}}} \cdot |x|^{\alpha/2}$$

(ii) Wärmeleitungsgleichung

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & , \text{ in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = g(x) & , \text{ auf } \mathbb{R} \times \{t=0\} \end{cases}$$

$\hat{\cdot}$: Fourier-Transformation bzgl. x

$$\bullet \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \quad \bullet \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = -k^2 \hat{u}$$

$$(*) \quad \xrightarrow{F} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{u}(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t) = 0 \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{g}(k) \end{cases} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{gewöhnliche DGL!} \\ \text{(für ein festes } k \in \mathbb{R}) \end{array}$$

Lösung des AWP's: $\hat{u}(k, t) = e^{-tk^2} \hat{g}(k)$

$$u(x, t) = (\hat{\hat{u}})(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (F * g), \quad \text{mit } \hat{\hat{F}}(k) = e^{-tk^2}$$

$$\check{(\hat{F})}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - tk^2} dk = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}_{\text{Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung!}} = F(x)$$

Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung!

$$u(x,t) = \frac{g * F}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

(iii) Wellengleichung & die d'Alembert-Lösung

$$(**) \quad \begin{cases} \partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = f(x) \\ \partial_t u(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t=0\}$$

$$(**) \xrightarrow{F} \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \hat{u} = -c^2 k^2 \hat{u} \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \\ \partial_t \hat{u}(k,0) = \hat{g}(k) \end{cases} \quad \leftarrow \text{gewöhnliche DGL 2. Ordnung}$$

allgemeine Lösung:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k) \cos(ckt) + \frac{1}{ck} \hat{g}(k) \sin(ckt)$$

- char. Polynom: $\lambda^2 + (c^2 k^2) = 0$
- $\hat{u}(k,t) = c_1 e^{ickt} + c_2 e^{-ickt}$
- c_1 & c_2 durch die Anfangsbed. berechnen: lineare Kombination von $\hat{f}(k)$ & $\hat{g}(k)$!

Nun ist

$$u(x,t) = \check{(\hat{u})}(x,t) = \underbrace{\hat{f}(k) \cos(ckt)}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{ck} \hat{g}(k) \sin(ckt)}_{(b)}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{a} \quad \hat{f}(k) \cdot \cos(ckt) &= f * \left(\frac{1}{2} (\delta(x-ct) + \delta(x+ct)) \right) \\ &= \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{b} \quad \frac{1}{ck} \hat{g}(k) \cdot \sin(ckt) &= \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(k)}{k} \sin(ckt) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \left[\frac{e^{ik(x+ct)} - e^{+ik(x-ct)}}{2ik} \right] dk \\ &= \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \int_{x-ct}^{x+ct} e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ik\xi} dk}_{g(\xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi) d\xi$$

d'Alembert-Lösung!