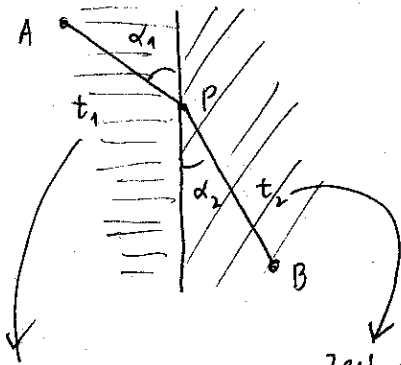


Variationsrechnung

Beispiele/ Motivation

① Snellinschen Brechungsgesetz



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

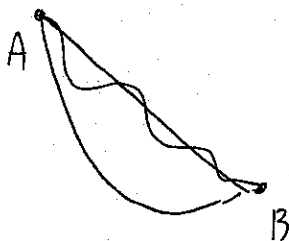
Zeit von A nach P

Zeit von P nach B

$$t_1 + t_2 \rightarrow \text{Min!}$$

(Snellius, 1580-1626)

② Das Brachystochronenproblem



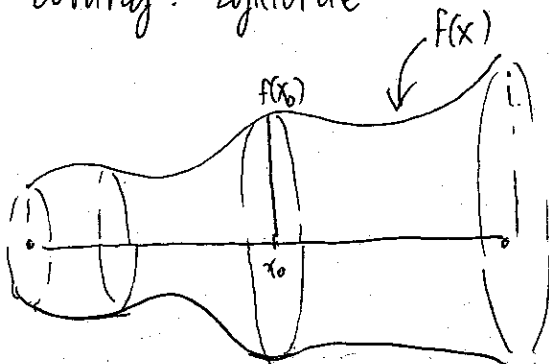
G. Galilei (1638)

J. Bernoulli (1696)

Kürzeste Zeit von A nach B

⇒ Lösung: Zykloide

③



Rotationsfläche

A → Min!

Lösung: Katenoide

④ Isoperimetrisches Problem (das Problem der $P_{\text{isoper.}}$)



Umfang: konstant = L] Nebenbedingung

A → Max ⇒ G: Kreis

⑤ Das Prinzip der kleinsten Wirkung

$L(t, x, p)$: Lagrangefunktion

$$S[\Gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, p) dt \rightarrow \text{Min!}$$

Hauptaufgabe der VR :

$$J[x] = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad ; \quad J: x \mapsto J[x]$$

$\uparrow$
 $\mathbb{R}$

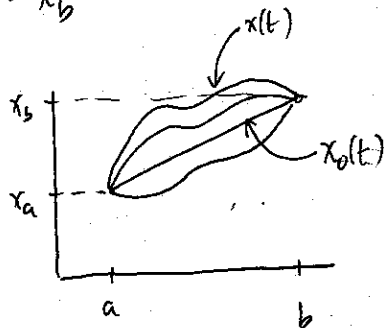
Funktional

Gesucht: $x_0 \in \mathcal{C}$, so dass $J[x_0] = \min_{x \in \mathcal{C}} J[x]$

↑
Klasse von "zulässigen" Funktionen (Vergleichsfunktionen)

z.B. : $\mathcal{C} = C^1([a, b])$, mit $x(a) = x_a$, $x(b) = x_b$

$x = \varphi(t, \xi)$: Schar von Kurven



Lemma (Fundamental-Lemma der VR)

Es sei $g(t) \in C([a, b])$ und $\int_a^b g(t)h(t) dt = 0$ für alle $h(t) \in \hat{C}([a, b])$
mit $h(a) = h(b) = 0$.

Dann ist $g(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Beweis:

Annahme: $\exists t_0 \in (a, b)$ mit $g(t_0) \neq 0$ (o.B.d.A. $g(t_0) > 0$)
(o.B.d.A. sonst $\exists r$ mit $g(t) > 0$ für $[a, a+r)$)

$g(t)$ stetig $\Rightarrow \exists \delta$ so dass $g(t) > 0 \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

z. Z. $\exists h(t) \in C^1([a, b])$ mit $\int_a^b g(t) h(t) dt \neq 0$

Wähle $h(t)$, so dass $h(t) > 0$ für $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $h(t) = 0$ sonst

(z. B., $h(t) = \begin{cases} (t - t_0 + \delta)^2 (t - t_0 - \delta)^2, & t \in B_\delta(t_0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$)

$$\Rightarrow \int_a^b g(t) h(t) dt = \int_{t_0 - \delta}^{t_0 + \delta} g(t) h(t) dt > 0$$

□

Nun betrachten wir eine einparametrische Schar von Kurven:

$$x = \varphi(t, \xi) \quad \text{mit}$$

$$x = x_0(t) + \underbrace{\xi h(t)}_{\substack{\text{Variationsparameter} \\ \in C^1([a, b]) \\ \text{mit } h(a) = h(b) = 0}}, \quad \text{wobei } \underbrace{x_0(t) = \varphi(t, 0)}_{\text{gesuchte Kurve}}$$

$$J[x] = \bar{J}(\xi) = \int_a^b F(t, x_0(t) + \xi h(t), \dot{x}_0(t) + \xi \dot{h}(t)) dt$$

Vorausss.: zweimal stetig diffbar bzgl. $t, x, \dot{x}$

Für ξ hat $\bar{J}(\xi)$ ein relatives Minimum $\Rightarrow \left. \frac{d\bar{J}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$

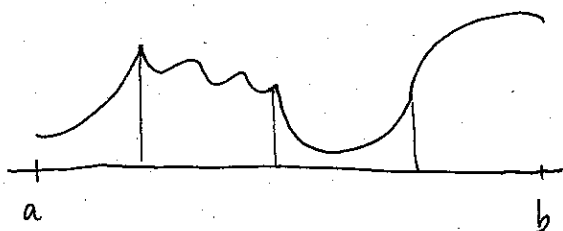
$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \cdot h(t) dt + \underbrace{\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \cdot \dot{h}(t) dt}_{= \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \cdot h \right|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h(t) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \cdot h \right]_a^b dt = 0$$

$$\begin{aligned} h(a) = h(b) = 0 \\ \Rightarrow \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h(t) dt &= 0 \quad \xrightarrow{\text{Fund.-Lemmma}} \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \text{Euler-Lagrange Gleichung} \end{aligned}$$

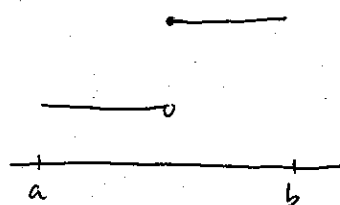
(3)

Sei $\ell : C_s^1([a,b])$: stetig & stückweise stetig diffbar



$C_s([a,b])$: stückweise stetig

- nicht-konvexe Variationsprobleme
- W-Potentiale



Lemma (Du Bois - Raymond)

Falls $g(t) \in C_s([a,b])$ & $\int_a^b g(t) \dot{h}(t) dt = 0 \quad \forall h \in C_s^1([a,b])$
mit $h(a) = h(b)$

$\Rightarrow \exists$ Konstante C mit

$g(t) = C \quad \forall t \in [a,b]$ außer an den Sprungstellen von g .

Beweisskizze:

$$C = \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \quad ; \quad \text{Wähle } h(t) = \int_0^t [C - g(\tau)] d\tau, \text{ so ist}$$

$$\Rightarrow \int_a^b (C - g(t)) dt = 0$$

$h(t) \in C_s^1([a,b])$
mit $h(a) = h(b) = 0$

$$\text{mit } \int_a^b g(t) (C - g(t)) dt = 0 \Rightarrow \int_a^b [C - g(t)]^2 dt = 0$$

$\Rightarrow g(t) = C$ an allen Stetigkeitsstellen von $g(t)$. $\square$

Folgerung:

$$(*) \quad \left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) = \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau)) d\tau + C \right\} \text{Integralform der EL-Gleichung!}$$

$$\left[\text{Ansatz: } p(t) = \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau)) d\tau \right.$$

Umformung von $\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, x_0(t), \dot{x}_0(t)) \cdot h(t) dt$ durch P.I.

Satz: Falls $x_0(t)$ unter allen Vergleichsfunktionen $x(t) \in C_s^1([a,b])$ ein relatives Minimum für

$$J[x] = \int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt \text{ erzeugt,}$$

2-mal stetig diffbar.
nach allen Arg.

$\Rightarrow \exists C$, so dass $\circledast$ gilt überall auf $[a,b]$ außer den Sprungstellen von $\dot{x}_0(t)$.

Bisher haben wir nur den Spezialfall

$$x(t) = x_0(t) + \xi h(t) \quad \text{betrachtet.}$$

lineare Abhängigkeit von ξ

Jetzt wollen wir den Formalismus allgemeiner vorstellen:

$$x(t) = \varphi(t, \xi)$$

$$x_0(t) = \varphi(t, 0)$$

Definition:

Die n-te Variation der Funktion $x_0(t)$ ist

$$\delta^n \varphi(t, \xi) = \left. \frac{\partial^n \varphi(t, \xi)}{\partial \xi^n} \right|_{\xi=0} \cdot \xi^n$$

Falls $\varphi(t, \xi)$ bzgl. ξ eine Taylor-Entwicklung an der Stelle $\xi=0$ besitzt:

$$\varphi(t, \xi) = \varphi(t, 0) + \delta \varphi(t, \xi) + \frac{1}{2!} \delta^2 \varphi(t, \xi) + \dots$$

Ein paar Rechenregel: (Annahme: $\varphi_t, \varphi_\xi, \varphi_{t\xi}$ ex. & stetig!)

$$(a) \quad \frac{d}{dt}(\delta \varphi) = \delta \frac{d\varphi}{dt}, \quad \delta \int_a^b F dt = \int_a^b \delta F dt$$

$$(b) \quad \text{Für } F = F(t, \varphi(t, \xi), \dot{\varphi}(t, \xi)) :$$

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \cdot \delta \dot{x} \quad (\text{vollständiges Differential})$$

(5)