

Die Hamilton-Jacobi Gleichung

Wiederholung:

$H(p, q, t)$: Hamiltonian ; $p = (p_\alpha)$, $q = (q_\alpha)$, $1 \leq \alpha \leq n$

• kanonische Bewegungsgleichungen: $-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \dot{p}_\alpha$, $\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{q}_\alpha$

• kanonische Transformation: $(q, p) \mapsto (Q, P)$
neue Koordinaten in Phasenraum.

Satz: Eine Transformation

$(q, p) \mapsto (Q, P)$ ist kanonoid bzgl. H g.d.w.

die folgende Bedingung gilt.

so dass $\exists k(Q, P)$ gibt mit

• $-\frac{\partial k}{\partial Q_\alpha} = \dot{p}_\alpha$

• $\frac{\partial k}{\partial P_\alpha} = \dot{q}_\alpha$

• $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{P_\alpha, P_\beta\} = 0$ & $\{Q_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$, $\forall \alpha, \beta$

wobei: $\{ \cdot, \cdot \}$: Poisson-Klammer in q_α, p_β : $\{f, g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\beta} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\beta}$

Ziel: Eine kan. Transformation $(q, p) \mapsto (Q, P)$ zu finden mit $k(Q, P, t) = 0$ ←

$\Rightarrow \dot{p}_\alpha = \dot{q}_\alpha = 0 \Rightarrow p_\alpha, q_\alpha$: Konstante!

"beste kanon. Transf!" ←

• Ansatz: Mittels einer erzeugenden Funktion $S(q, Q, t)$: ← erz. Funktion 1. Art

$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$, $P_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial Q_\alpha}$, $k(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$ ← Wunsch!

Wähle: $S = \int_{t_0}^t L(q, \dot{q}, t') dt' + C$

$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial t} = L(q, \dot{q}, t)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_\alpha \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = L - \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha \stackrel{\text{Legendre-Fenchel Trans.}}{=} -H(q, p, t)$

$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}$

$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t)$

(in einer Dimension,
sonst $-H(q, \nabla_q S, t)$)

①

Hamilton-Jacobi Gleichung

nichtlineare PDE,
1. Ordnung für S
in $(n+1)$ Variablen

Satz: $S(q, Q, t)$ sei eine Lösung der Hamilton-Jacobi Gleichung, die von $(n+1)$ konstanten $Q_1, \dots, Q_n, C$ abhängt, so dass

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \right) \neq 0. \quad] \quad (*)$$

Dann definieren die Gleichungen

$$(*) \quad \left[\quad p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial S}{\partial Q_\alpha} \quad (P_1, \dots, P_n \text{ sind Konstanten}) \right]$$

die kanonische Transformation von den $2n$ Konstanten der Bewegung (Q_α, P_α) zu den q_α, p_α , die die Bewegungen des Systems darstellen (und die kanonischen Gleichungen erfüllen).

Bem.

- ① H stellt S nicht fest: S : Lösung $\Rightarrow S+C$: auch eine Lösung
- ② $(*)$ stellt sicher, dass die Gleichungen für P_α für die $q_\alpha(Q, P, t)$ gelöst werden kann
 $\Rightarrow$ auch eine Darstellung von Q_α, P_α als Funktionen der q, p, t möglich!

Beweis:

z.Z. p_α, q_α erfüllen die kanon. Bewegungsgl.

① Betrachte $\dot{P}_\alpha$

$$\dot{P}_\alpha = 0 = -\frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial Q_\alpha} = - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial Q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta - \frac{\partial^2 S}{\partial Q_\alpha \partial t} \right)$$

$$\text{Sei } H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = \tilde{H}(q, Q, t).$$

$$S \text{ Lösung der HJ-Gleichung} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial Q_\alpha \partial t} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial p_\beta} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial Q_\alpha \partial q_\beta}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{\partial^2 S}{\partial Q_\alpha \partial q_\beta} \underbrace{\left[\dot{q}_\beta - \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \right]}_{0!} \Rightarrow \dot{q}_\beta = \frac{\partial H}{\partial p_\beta}$$

⑪ Betrachte $\dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t}$

... $\frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}$

$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \left(\underbrace{\dot{q}_\beta - \frac{\partial H}{\partial p_\beta}}_{=0} \right) \Rightarrow \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

Strategie:

① HJ-Gleichung lösen: $S(q_1, \dots, q_n, \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{\text{bel. Konstanten!}}, t)$

② S in $(*)$ einsetzen

③ Die Gleichungen für $p_\alpha(q, p, t)$, $q_\alpha(q, p, t)$ algebraisch lösen & Randbedingungen einarbeiten

"Man muss immer umkehren" ~ Jacobi

Beispiel (Freies Teilchen)

$H(p) = \frac{1}{2} p^2 \quad (m=1)$

① HJ-Gleichung: $\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2$: muss konstant sein!

Diese konst. sei $-Q$. $\Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = -Q \\ \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 = 2Q \end{cases} \Rightarrow S = q\sqrt{2Q} - Qt$

$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial q} \right) = \frac{1}{\sqrt{2Q}} \neq 0$

② $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2Q}$, $P = -\frac{\partial S}{\partial Q} = t - \frac{q}{\sqrt{2Q}}$

③ $P = t - \frac{q}{\sqrt{2Q}} \Rightarrow q(q, P, t) = \sqrt{2Q}(t - P)$
 $p(q, P, t) = \underline{p(Q)} = \sqrt{2Q}$ auch konst! | $Q = \frac{1}{2} p^2 = \frac{1}{2} (p(t_0))^2$ $\leftarrow$ Energie
 $P = -\left(\frac{q(t_0)}{p(t_0)} \right) + t_0$ (3)

Beispiel: (Harmonische Oszillator)

$$(1) H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}_{\text{zeitunabhängig!}} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad \hookrightarrow \text{Separationsansatz:}$$

$$S(q, Q, t) = W(q, Q) + V(Q, t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = -\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha : \text{konstant!}$$

$$\text{Sei } Q := \alpha$$

$$\bullet \frac{\partial V}{\partial t} = -Q \Rightarrow V = -Qt$$

$$\bullet \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 = m^2 \omega^2 \left(\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2 \right) \xrightarrow{\text{TdV}} W = m\omega \int \sqrt{\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2} dq$$

$$\Rightarrow S = m\omega \int \sqrt{\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2} dq - Qt$$

$$(2) p = \frac{\partial S}{\partial q} = m\omega \left(\sqrt{\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2} \right) \quad \left| \quad p = -\frac{\partial S}{\partial Q} = t - \frac{1}{\omega} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2Q}{m\omega^2} - q^2}} dq \right.$$

$$\left. \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(q\omega \sqrt{\frac{m}{2Q}} \right) \right.$$

$$p = t - \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(q\omega \sqrt{\frac{m}{2Q}} \right)$$

$$(3) p(Q, p, t) = m\omega^2 \sqrt{\frac{2Q}{m\omega^2}} \cos(\omega(t+p)) \Rightarrow q(Q, p, t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2Q}{m}} \sin(\omega(t+p))$$

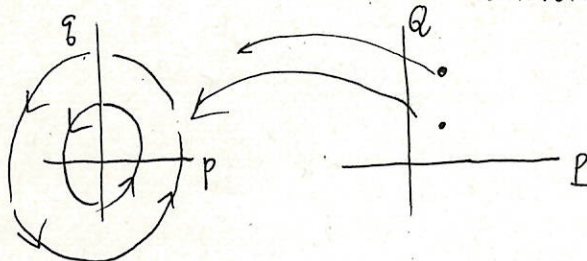
$$= \underbrace{\sqrt{2Q} m}_{\text{"Amplitude"}} \cos(\omega(t+p))$$

"Phase"!
(Zeitverschiebung)

$$\text{Randbed: } t=0 : p(0)=0, q(0)=q_0$$

$$\Rightarrow p(0)=0 \Rightarrow \omega p = \pi/2 \Rightarrow p = \pi/2\omega$$

$$\Rightarrow q(0)=0 \Rightarrow \frac{2Q}{m\omega^2} - q_0^2 = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2} m \omega^2 q_0^2$$



HJ-Gleichung & die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \psi \quad ; \quad \psi = e^{iS/\hbar} \quad \downarrow \text{komplex}$$

Variablenwechsel
→

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \underbrace{\frac{-i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2}}_{\xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 0} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V(q)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial S}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V(q)}_{H(q, \frac{\partial S}{\partial q})}$$

HJ-Gleichung!

0. te Term in der
WKB-Approximation