

Klassische Mechanik vs Quantenmechanik

KM	QM
- Phasenraum: $\mathbb{R}^{2n} \ni (q, p)$ Zustandsraum: $\mathbb{R}^{2n+1} \ni (t, q, p)$ - Hamilton-Funktion: $H: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $(t, q, p) \mapsto H(t, q, p)$ - Zeitliche Entwicklung eines Phasenvektors $\psi(t) = (q(t), p(t))$ $\longleftrightarrow$ Ham. Bewegungsgleichungen - Observable: <u>Funktionen</u> auf dem Zustandsraum	(reine) Zustände: normierte Vektoren eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ ($\psi \in \mathcal{H}$) - observable: selbstadj. Operatoren in $\mathcal{H}$ - zeitliche Entwicklung: gegeben durch einen selbstadj. Operator $\hat{H}$: Hamilton-operator Zustand zum Zeitpunkt $t > 0$: $\psi(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \psi_0$ - Ortsoperator: $(Q\psi)(x) = x\psi(x)$ [$D(Q) = L^2(\mathbb{R}^{2n})$] Impulsoperator: $(P\psi)(x) = -i\hbar\psi'(x)$ [$D(P) = W^{2,1}$] $\uparrow$ Sobolevraum!

Postulate der QM

- (P1) Zustände: ^{normierte Vektoren/} eindimensioneller Unterräume eines separablen $\mathbb{C}$ -Hilbertraums $\mathcal{H}$
- (P2) Observable: jede beobachtbare Größe eines QM Systems ist beschrieben durch einen selbstadjungierten Operator in $\mathcal{H}$
- (P3) Sei $\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1$: reiner Zustand
 $T: \mathcal{H} \supseteq D(T) \rightarrow \mathcal{H}$: observable
 $\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert der beob. Größe T in der Menge $A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ liegt ist gegeben durch $\|E(A)\psi\|^2 = \langle E(A)\psi, \psi \rangle$
 wobei $E: \mathcal{B}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$: Spektralmaß des Operators T
- (P4) Zeitliche Entwicklung: $\psi(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \psi_0$] Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung
 ①

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi = \hat{H} \psi(t)$$

Übersicht über einige wichtige ^{math.} Begriffe der QM (siehe R. Denk, "Mathematische Grundlagen der QM", Springer, Berlin, 2022)

Begriff	
• Separabler Hilbertraum • $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ • $W^{2,1}(\mathbb{R}^{2n})$ • Distributionelle Ableitung • Selbstadjungierter Operator	Zustandsraum Zustandsraum für die Orts- & Impulsvariable (P1) Definitionsbereich für die Impulsvariable Wirkung der Impulsvariablen observable (P2)
• Spektralsatz & Spektralmaß • Unitäre Gruppe	stochastische Interpretation (P3) zeitliche Entwicklung des Systems (P4)
• Spurklasseoperator	Gemischter Zustand

Ziel & Ausblick des Kapitels

- Spektralsatz & Spektralmaße (auch als "projektorwertiges Maß" bekannt)
- Spektraltypen & asymptotisches Verhalten ("RAGE Theorem")
 = Quantendynamik
 ↳ Ruelle-Amrein-Georgescu-Enss

Dazu benötigen wir ein Resultat aus Lebesgue-Theorie:
 der Lebesguesche Zerlegungssatz

Der Zerlegungssatz von Lebesgue

Def. Eine Abbildung $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (X : Menge, Σ : σ -Algebra) heißt signiertes Maß, wenn gilt:

- ① $\mu(\emptyset) = 0$
- ② $\mu(A) \in (-\infty, \infty]$ oder $\mu(A) \in [-\infty, \infty)$, $\forall A \in \Sigma$
- ③ Sind $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt, so ist

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(X, Σ) : Messraum
 (X, Σ, μ) : Maßraum

Ein signiertes Maß μ heißt endlich, falls $|\mu(A)| < \infty$, $\forall A \in \Sigma$.

σ -endlich, wenn es eine Folge (E_n) in Σ mit
 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ & $|\mu(E_n)| < \infty$, $\forall n$

Eine Menge $P \in \Sigma$ heißt

- $(\mu-)$ positiv, falls $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Sigma$ mit $A \subseteq P$
- $(\mu-)$ negativ, falls $\mu(A) \leq 0 \quad \forall A \in \Sigma$ mit $A \subseteq P$
- $(\mu-)$ Nullmenge, falls $\mu(A) = 0 \quad \forall A \in \Sigma$ mit $A \subseteq P$

Lemma

- (a) Ist $A \in \Sigma$, $|\mu(A)| < \infty$, so gilt $|\mu(B)| < \infty$ für alle $B \in \Sigma$ mit $B \subseteq A$.
- (b) Aus $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $A_n \uparrow B$, $|\mu(A_n)| < \infty$ folgt $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(B)$
- (c) Ist $\mu: \Sigma \rightarrow [-\infty, \infty)$ ein signiertes Maß, so enthält jedes $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) \neq -\infty$ eine positive Menge P mit $\mu(P) \geq \mu(A)$.

Beweis:

(a) $\mu(A) = \underbrace{\mu(B)} + \underbrace{\mu(A \setminus B)}$
beide endlich wegen (2)

(b) Man kann zeigen dass: $A_n \uparrow A \rightarrow \mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A)$
③

Nun gilt wegen $A_1 \setminus A_n \uparrow A_1 \setminus B$: $\mu(A_1 \setminus A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus B)$

$$\mu(A_1 \setminus A_n) + \mu(A_n) = \mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus B) + \mu(B)$$

alle Terme sind endlich: $\mu(A_n) \rightarrow \mu(B)$.

$$\textcircled{C} \text{ z.z. : } \left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists A \supseteq A_\varepsilon \in \Sigma, \mu(A_\varepsilon) \geq \mu(A) \text{ und} \\ \forall B \subseteq A_\varepsilon : \mu(B) \geq -\varepsilon \end{array} \right] \quad (*)$$

Angenommen: $(*)$ wäre falsch

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, so dass jede messbare Menge $C \subseteq A$ mit $\mu(C) \geq \mu(A)$ eine messbare Menge enthält, so dass $\mu(B) < -\varepsilon$.

Induktion liefert eine Folge messbarer Mengen

$$B_1 \subseteq A, \quad B_k \subseteq A \setminus \bigcup_{n=1}^{k-1} B_n, \quad k \geq 2 \text{ so dass } \mu(B_k) < -\varepsilon$$

$$B_k \text{ paarweise disjunkt} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = -\infty$$

$$\text{Aber } \mu(A) \neq -\infty \quad \text{!}$$

$(*) + \text{Induktion} \Rightarrow \exists$ eine fallende Folge $A_{1/n} \in \Sigma$, so dass
(mit $\varepsilon = \frac{1}{n}$)

$$P := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n} \text{ positiv ist} \quad (\forall B \subseteq A_{1/n}, \mu(B) \geq -\frac{1}{n})$$

$$\text{Teil (b)} \Rightarrow \mu(P) \geq \mu(A).$$

Satz (Hahnscher Zerlegungssatz)

Zu jedem signierten Maß $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert eine disjunkte Zerlegung $X = P \sqcup N$ in eine pos. Menge P & eine neg. Menge N (die bis auf eine μ -Nullmenge eindeutig bestimmt sind).

Beweis:

$$\text{o.B.d. } A \text{ sei } \mu(A) \in [-\infty, \infty) \quad \forall A \in \Sigma$$

$$\text{Setze } \alpha = \sup \{ \mu(A) : A \in \Sigma \}$$

aus Teil (c) des obigen Lemma folgt: $\exists P_n$, positive Mengen mit $\mu(P_n) \rightarrow \alpha$
(4)

$$\Rightarrow P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n : \text{positiv} \ \& \ \mu(P) \geq \mu(P_n) \ \forall n$$

$$\text{also } \mu(P) = \alpha \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

Beh.: $N := P^c$ ist eine neg. Menge

$$\text{Ang. nicht: } \exists B \subseteq N \text{ mit } \mu(B) > 0 \Rightarrow \underbrace{\mu(P \cup B)}_{\in \Sigma} > \alpha \quad \Sigma$$

Ist $\Omega = P' \sqcup N'$ eine weitere solche Zerlegung

$$B \in \Sigma, \ B \subseteq P \setminus P' \text{ so ist } \left. \begin{array}{l} \mu(B) \geq 0, \text{ da } B \subseteq P \\ \mu(B) \leq 0, \text{ da } B \subseteq N' \end{array} \right\} \Rightarrow \mu(B) = 0.$$

$\Rightarrow P \setminus P'$ ist eine Nullmenge! (aus Symmetriegründen $P' \setminus P$ auch)

(Analog gilt für N, N') □

Def: Sei $X = P \sqcup N$ eine Hahn-Zerlegung von X bzgl. μ .

- $\mu^+ : \Sigma \rightarrow [0, \infty], \ \mu^+(A) = \mu(A \cap P)$: positive Variation von μ
- $\mu^- : \Sigma \rightarrow [0, \infty], \ \mu^-(A) := -\mu(A \cap N)$: negative Variation von μ
- $|\mu| : \Sigma \rightarrow [0, \infty], \ |\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A)$: Variation von μ

Prop:

$$(a) \ \mu^+(A) = \sup \{ \mu(B) \mid B \in \Sigma, B \subseteq A \}$$

$$(b) \ \mu^-(A) = -\inf \{ \mu(B) \mid B \in \Sigma, B \subseteq A \}.$$

Die Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ eines signierten Maßes μ heißt Jordan-Zerlegung von μ .

Def: Zwei signierte Maße ν, ρ heißen zueinander singulär, wenn es ein $A \in \Sigma$ gibt mit

$$\nu(A) = 0 \text{ und } \rho(A^c) = 0$$

Notation: $\nu \perp \rho$.

Beispiel: $X = \mathbb{R}, \ \Sigma$: Borel σ -Algebra

$$\Rightarrow \mu_{\text{Leb}} \perp \delta_0, \text{ da } \mu_{\text{Leb}}(\{0\}) = 0 \ \& \ \delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0.$$

Satz (Jordanscher Zerlegungssatz):

Jedes signierte Maß μ hat die Jordan-Zerlegung

$$\mu = \mu^+ - \mu^-;$$

dabei gilt $\mu^+ \perp \mu^-$.

Die Jordan-Zerlegung ist minimal in folgendem Sinne: Ist $\mu = \rho - \nu$ mit zwei Maßen $\rho, \nu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (von denen mind. eines endlich ist), so gelten $\mu^+ \leq \rho$ und $\mu^- \leq \nu$.

Beweis: 2.2: Minimalität

Seien ρ, ν wie im Satz. Dann gilt $\forall A \in \Sigma$

$$\mu^+(A) = \mu(A \cap P) = \rho(A \cap P) - \nu(A \cap P) \leq \rho(A \cap P) \leq \rho(A)$$

(Analog $\mu^- \leq \nu$).

Def (Absolute Stetigkeit):

Sind μ, ν signierte Maße, so heißt ν absolut stetig bzgl. μ , wenn $\forall A \in \Sigma$ gilt

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

Notation: $\nu \ll \mu$.

Beispiel: Ist μ ein Maß und $\nu = f \cdot \mu$ mit quasi-integrierbarer Dichte

$f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so ist $\nu \ll \mu$.

mind. eines der beiden Integrale

$$\int_X f^+ d\mu \text{ oder } \int_X f^- d\mu \text{ endlich ist.}$$

Satz (Radon-Nikodym)

Es seien $\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ein σ -endliches Maß, ν : ein signiertes Maß mit $\nu \ll \mu$. Dann hat ν eine (eindeutige) Dichte f bzgl. μ .

Bemerkung:

① ν endlich $\iff \int f$ integrierbare Dichte bzgl. μ

② ν σ -endlich $\iff \exists$ reellwertige Dichte f bzgl. μ