

Satz (Lebesguescher Zerlegungssatz)

Sind μ ein σ -endliches Maß und ν ein σ -endliches signiertes Maß auf Σ ,
so gibt es genau eine Zerlegung

$$\nu = \rho + \kappa := \nu_{ac} + \nu_s$$

von ν in zwei signierte Maße ρ, κ auf Σ , so dass $\rho \ll \mu$, $\kappa \perp \mu$ und
 ρ hat eine (quasi-)integrierbare Dichte f bzgl. μ .

Dabei sind ρ, κ σ -endlich, und ρ, κ sind g.d. endlich wenn ν es ist.

Beweis:

Nach dem Jordanscher Zerlegungssatz reicht es Existenz zu zeigen
für μ, ν : σ -endliche (nicht signiert!)
Maße

Setze $\tau = \mu + \nu$.

τ : σ -endlich, mit $\mu \ll \tau$.

Satz von RN $\Rightarrow \exists g \geq 0$ mit $\mu = g \cdot \tau$.

Setze $N = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$.

Definiere

$$\rho, \kappa : \Sigma \rightarrow [0, \infty], \quad \begin{aligned} \rho(A) &:= \nu(A \cap N^c) \\ \kappa(A) &:= \nu(A \cap N) \end{aligned}$$

Offenbar gilt $\kappa \perp \mu$ denn

$$\mu(N) = \int_N g d\tau = 0, \quad \kappa(N^c) = 0$$

Noch z.z. : $\rho \ll \mu$. Dazu sei $A \in \Sigma$ eine Nullmenge.

$$\begin{aligned} 0 = \mu(A) &= \int_X g \mathbb{1}_A d\tau \Rightarrow g \mathbb{1}_A = 0 \stackrel{\tau}{\text{f.ü.}} \Rightarrow \tau(A \cap N^c) = 0 \\ &\Rightarrow \rho(A) = \nu(A \cap N^c) = 0 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit : Übung!

Bemerkung : Für $X = \mathbb{R}^n$, ν : regulär, Borel-Maß auf X gilt die verallgemeinerte

Lebesguesche-Zerlegung : $\nu = \nu_{ac} + \nu_s = \underbrace{\nu_{ac}}_{\substack{\text{"absolutely contin."} \\ \text{w.r.t. Lebesgue meas}}} + \underbrace{\nu_{pp}}_{\substack{\text{"pure"} \\ \text{"point"}}} + \underbrace{\nu_{sc}}_{\substack{\text{"singular"} \\ \text{"continuous"}}$

Maß-Theorie

(verallgem. Lebesguesche
Zerlegungssatz)

$$\mu = \underbrace{\mu_{ac}}_{\substack{\text{absch.} \\ \text{contin.}}} + \underbrace{\mu_{sc}}_{\substack{\text{sing.} \\ \text{contin.}}} + \underbrace{\mu_{pp}}_{\text{pure point}}$$

Funktionalanalysis

(Spektralsatz, Spektralmaße)

$\mathcal{H}$: Hilbertraum
 T : selbstadjungierter Operator
auf $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}$

$$T = \int \lambda dE(\lambda) \quad ; \quad E: \text{projektorwertiges Maß}$$

$$E: \mathcal{B}(\sigma(T)) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

• zu jedem $\psi \in \mathcal{H}$ $\exists \mu_\psi$: Borel-Maß auf $\sigma(T)$
mit
 $\mu_\psi(A) := \langle E(A)\psi | \psi \rangle, \quad A \in \mathcal{B}(\sigma(T))$

$$\mu_\psi = \underbrace{(\mu_\psi)_{ac}}_{\sim} + (\mu_\psi)_{sc} + (\mu_\psi)_{pp}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_{pp}$$

$$\psi(t) = e^{-itH} \psi(0) = \mathcal{U}(t)\psi(0)$$

$\{\mathcal{U}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$: stark stetige einparametrische
Gruppe unitärer Operatoren

Quantendynamik (zeitliche Entwicklung)

Frage:

Was bedeutet es dann,
 $\psi \in \mathcal{H}_a$ zu haben ($a \in \{pp, c, ac\}$)
e.g. dynamische Eigenschaften/
gehaben, Streuzustand im zeitl. Mittel,
Streuzustand)?

A: Der RAGE-Theorem

Referenzen

- R. Denk, Math. Grundlagen der QM, 2003
- J. Weidmann, Lineare Operatoren
in Hilberträumen I, 2000 : Kap. 5, 8
II, 2003 : Kap. 12
- G. Teschl, Math. Methoden der QM, 2009

Def. Sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{C}$ -Hilbertraum.

- (a) Ein linearer Operator $T: \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung von $D(T) \subset \mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$, wobei $D(T)$ ein linearer Unterraum ist.

$D(T)$: Definitionsbereich von T

$G(T) := \{(\psi, T\psi) : \psi \in D(T)\}$: Graph von T

$R(T) := \{T\psi : \psi \in D(T)\}$: Wertebereich von T

$\ker(T) := \{\psi \in D(T) : T\psi = 0\}$: Kern von T

- (b) T heißt abgeschlossen falls $G(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ist.

- (c) Sei $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Dann ist T stetig genau dann wenn T beschränkt ist, d.h.

$$\|T\psi\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\psi\|_{\mathcal{H}} \quad (\psi \in \mathcal{H})$$

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$: Raum aller stetigen lin. Op.

Norm in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$: $\|T\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|\psi\|=1} \|T\psi\|$

$\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$: Operatornorm

$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$: Norm in $\mathcal{H}$

Def Sei $T: D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ abgeschlossen.

- (a) $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda : D(T) \rightarrow \mathcal{H} \text{ ist bijektiv}\}$: Resolventenmenge von T

- (b) $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$: Spektrum von T

- (c) $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ nicht inj.}\} = \text{Menge aller EW von } T$: Punktspektrum von T

- (d) $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T - \lambda)} = \mathcal{H}, R(T - \lambda) \neq \mathcal{H}\}$: kontinuierliche Spektrum

- (e) $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ injektiv, } \overline{R(T - \lambda)} \neq \mathcal{H}\}$: residuelle Spektrum

Def: Sei $T: \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ ein lin., dicht definierter Operator ($\overline{D(T)} = \mathcal{H}$)

Sei $D(T^*) = \{ \psi \in \mathcal{H} : \exists \varphi^* \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle T\varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \varphi^* \rangle \}$

der adjungierte Operator: $T^*: D(T^*) \rightarrow \mathcal{H}$
 $\psi \mapsto \varphi^* \quad (\text{d.h. } T^*\psi = \varphi^*)$

Bem:

- Dichtheit $\leadsto \varphi^*$ eindeutig $\leadsto T^*$ wohldefiniert
- T^* : immer abgeschlossen
- $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \leadsto D(T^*) = \mathcal{H}$, $\langle T\psi | \varphi \rangle = \langle \psi, T^*\varphi \rangle$
- T dicht auf $\leadsto \overline{R(T)} = \ker(T^*)^\perp$, $R(T)^\perp = \ker(T^*)$

Def: T : linear, dicht definiert

- ① T normal: $TT^* = T^*T$
- ② T unitär: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $TT^* = T^*T = \text{id}_{\mathcal{H}}$
- ③ T selbstadjungiert: $T = T^*$
- ④ T symmetrisch: $T \subset T^*$
 (d.h., $D(T) \subset D(T^*)$, $T\psi = T^*\psi \quad \forall \psi \in D(T)$)

Bem:

- $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$: T selbstadj. $\iff T$ symmetrisch
- T selbstadjungiert: $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, $\underbrace{\sigma_r(T)}_{\text{Wann?}} = \emptyset$
 $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$
 $\overline{R(T-\lambda)} = \ker(T-\lambda)^\perp$
 $= \{0\}^\perp = \mathcal{H}$
 $\Rightarrow \lambda \in \sigma_c(T)$

Satz (Kriterium für Selbstadjungiertheit)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T: \mathcal{H} \supset D(T) \rightarrow \mathcal{H}$ symmetrisch.

Falls $R(T+i) = R(T-i) = \mathcal{H}$, so ist T selbstadjungiert.