

Vertiefung NWI: 12. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 25.6.2014

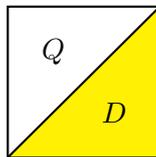
12. Unabhängigkeit von Zufallsgrößen mit Dichten

12.1 Mehrdimensionale Dichten

Beispiel

Wahrscheinlichkeit, daß ein im Einheitsquadrat Q zufällig gewählter Punkt in dem Dreieck D liegt, das unterhalb der Winkelhalbierenden liegt:

$(1, 0)$



$(0, 0)$ $(0, 1)$

$$Q = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$D = \{(x, y) \in Q: y \leq x\}$$

Es muß offenbar $\mathbb{P}\{D\} = |D|/|Q| = 1/2$ gelten, wobei $|\cdot|$ den Inhalt (hier: den Flächeninhalt) einer Menge bezeichne.

Formelle Berechnung der Inhalte:

$$|Q| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_Q(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 1 \, dx \right) dy = \int_0^1 1 \, dy = 1$$

$$|D| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 1 \, dx \right) dy = \int_0^1 (1 - y) \, dy = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}\{D\} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(x, y) \, dx \, dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_Q(x, y) \, dx \, dy} = \frac{1}{2}$$

Definition: *mehrdimensionale Dichte*

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ heißt *n-dimensionale Dichte*, falls f integrierbar ist mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

- X_1, \dots, X_n seien Zufallsgrößen. Eine *n-dimensionale Dichte* f heißt *gemeinsame Dichte* von X_1, \dots, X_n , wenn für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$(*) \quad \mathbb{P}\{X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n\} = \int_{-\infty}^{a_n} \dots \int_{-\infty}^{a_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

gilt.

Bemerkungen

- Mit $C = (-\infty, a_1] \times \dots \times (-\infty, a_n]$ kann (*) geschrieben werden als

$$(**) \quad \mathbb{P}\{(X_1, \dots, X_n) \in C\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} 1_C(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Dabei gilt (**) auch für allgemeinere Mengen C , nämlich für alle *meßbaren* Mengen. Zu den meßbaren Mengen gehören insbesondere alle Mengen, die sich als höchstens abzählbare Vereinigungen und Schnitte von Rechtecken darstellen lassen.

Abkürzend schreiben wir

$$\int_C f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

für die iterierten Integrale auf der rechten Seite von (**).

- Für nichtnegative Integranden ist die Reihenfolge der Integration egal und es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\pi_1} \dots dx_{\pi_n}$$

für jede Permutation (π_1, \dots, π_n) von $(1, \dots, n)$.

Überzeugen Sie sich davon anhand des obigen Beispiels:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(x, y) dy dx = \int_0^1 \left(\int_0^x 1 dy \right) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_D(x, y) dx dy$$

Beispiel: Uniforme Verteilung

- Für eine (meßbare) Menge $C \subset \mathbb{R}^2$ gibt das Doppelintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_C(x, y) \, dx \, dy = \int_C 1 \, dx \, dy$$

den Flächeninhalt $|C|$.

- Für eine (meßbare) Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ ist

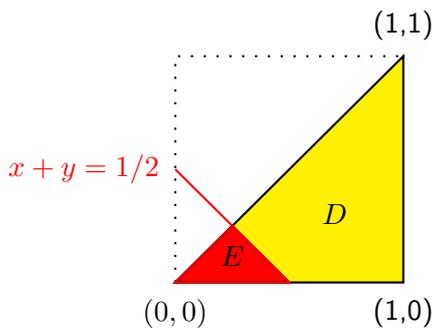
$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{|C|} 1_C(x_1, \dots, x_n)$$

die Dichte der uniformen Verteilung auf C .

- Sei $C = D$ das Dreieck aus dem obigen Beispiel. Wie groß ist die Ws., daß die Summe $X + Y$ der Koordinaten (X, Y) eines zufällig gewählten Punkts in D kleiner als $1/2$ ist?

Sei $E = \{(x, y) \in D : x + y < 1/2\}$.

Raten Sie die Ws. mit Hilfe einer Skizze:



$$\mathbb{P}\{(X, Y) \in E\} = \frac{|E|}{|D|} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

- Das Berechnen gemäß Definition erfordert eine Vorbereitung:

$$\begin{aligned} (x, y) \in E = E \cap D &\iff 0 \leq y \leq x \leq 1 \text{ und } x + y < \frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \text{ und } 0 \leq y \leq x \text{ und } y < \frac{1}{2} - x \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{(X, Y) \in E\} &= \int_E f(x, y) \, dx \, dy && \text{mit } f = \frac{1}{|D|} 1_D(x, y) \\ &= \frac{1}{|D|} \int_{E \cap D} 1 \, dy \, dx && \text{(Vertauschen von } dx \text{ und } dy) \\ &= \frac{1}{|D|} \int_0^{1/2} \left(\int_0^{\min\{x, 1/2-x\}} 1 \, dy \right) dx \\ &= \frac{1}{|D|} \int_0^{1/2} \min\{x, 1/2 - x\} \, dx \\ &= \frac{1}{|D|} \left(\int_0^{1/4} x \, dx + \int_{1/4}^{1/2} (1/2 - x) \, dx \right) = \frac{1}{|D|} 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{1/4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

12.2 Randdichten

Bemerkung: von der gemeinsamen Dichte zur Randdichte

Aus der gemeinsamen Dichte von X_1, \dots, X_n läßt sich die Dichte eines jeden X_k berechnen: Sei dazu $C = \mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty, a] \times \mathbb{R}^{n-k}$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_k \leq a\} &= \mathbb{P}\{(X_1, \dots, X_n) \in C\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^a \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n \right) dx_k \\ &= \int_{-\infty}^a f_k(x) \, dx \end{aligned}$$

mit

$$(***) \quad f_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n$$

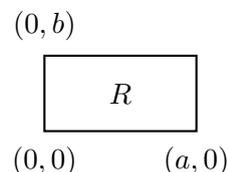
Somit ist f_k eine Dichte für X_k .

Definition: k -te Randdichte

Sei f die gemeinsame Dichte von X_1, \dots, X_n . Dann heißt f_k , wie in (***) definiert, die k -te Randdichte von f .

Beispiele

- *Uniforme Verteilung auf einem Rechteck* $R = [0, a] \times [0, b]$



Ist (X, Y) ein zufälliger Punkt aus R , so haben die Koordinaten X und Y die gemeinsame Dichte

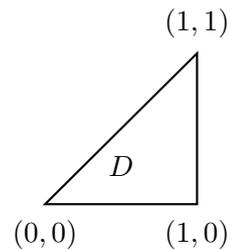
$$f(x, y) = \frac{1}{ab} 1_R(x, y) = \frac{1}{a} 1_{[0, a]}(x) \cdot \frac{1}{b} 1_{[0, b]}(y) .$$

Es folgt für die Randdichten f_X von X und f_Y von Y durch "Rausintegrieren" von y bzw. x :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy = \int_0^b \frac{1}{ab} 1_{[0, a]}(x) \, dy = \frac{1}{a} 1_{[0, a]}(x) \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx = \int_0^a \frac{1}{ab} 1_{[0, b]}(y) \, dx = \frac{1}{b} 1_{[0, b]}(y) \end{aligned}$$

Wir haben in diesem Fall $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

- *Uniforme Verteilung auf dem Dreieck D*



Ist (X, Y) ein zufälliger Punkt aus D , so haben die Koordinaten X und Y die gemeinsame Dichte

$$f(x, y) = \frac{1}{|D|} 1_D(x, y)$$

Es folgt für die Randdichten f_X von X und f_Y von Y :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dy = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|D|} 1_{[0,x]}(y) \, dy & \text{für } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= 1_{[0,1]}(x) \int_0^x \frac{1}{|D|} \, dy = 2x 1_{[0,1]}(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx = \int_y^1 \frac{1}{|D|} 1_{[0,1]}(y) \, dx = 2(1 - y) 1_{[0,1]}(y)$$

In diesem Fall gilt $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

12.3 Unabhängigkeit

Definition: *Unabhängigkeit von Zufallsgrößen*

X_1, \dots, X_n heißen *unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}\{X_1 \leq a_1, \dots, X_n \leq a_n\} = \mathbb{P}\{X_1 \leq a_1\} \dots \mathbb{P}\{X_n \leq a_n\}$$

für alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung

Für diskrete Zufallsgrößen ist diese Definition äquivalent zur bekannten Definition.

Satz

Gegeben seien Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n , die jeweils eine Dichte f_i besitzen. Dann gilt:

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \iff \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \\ \text{gemeinsame Dichte von } X_1, \dots, X_n \end{array}$$

Bemerkung

Die Existenz einer gemeinsamen Dichte wird nicht vorausgesetzt. Der Satz sagt also insbesondere:

- Wenn die Zufallsgrößen Dichten haben und unabhängig sind, dann existiert die gemeinsame Dichte und hat Produktform.
- Wenn die gemeinsame Dichte existiert und Produktform hat, dann sind die Zufallsgrößen unabhängig.

Wenn wir unabhängige Zufallsexperimente modellieren wollen, tun wir das also, indem wir für die gemeinsame Dichte die Produktform wählen.

Beispiele

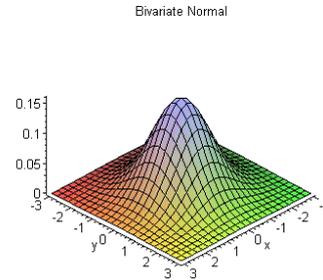
- Wir haben oben bereits gesehen, daß die gemeinsame Dichte der Koordinaten eines zufälligen Punkts im Rechteck R Produktform hat. Also sind die Koordinaten unabhängig.
- Wir haben auch gesehen, daß die Koordinaten eines zufälligen Punkts im Dreieck D nicht unabhängig sein können.

Erläutern Sie anschaulich den Grund für das unterschiedliche Verhalten.

Beispiel: Mehrdimensionale Normalverteilung

- Sind die Koordinaten X und Y unabhängig und standardnormalverteilt, so hat der zufällig gewählte Punkt (X, Y) die Dichte

$$f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2} e^{-(x^2+y^2)/2}$$



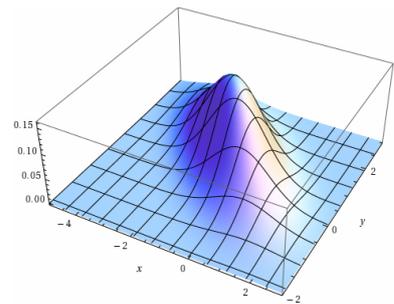
- Entsprechend ergibt sich für unabhängige standardnormalverteilte X_1, \dots, X_n als gemeinsame Dichte die Dichte der n -dimensionale Normalverteilung zu

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\|x\|^2/2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n$$

- Die allgemeine, nicht-degenerierte n -dimensionale Normalverteilung ist gegeben durch ihre Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi \det \Sigma)^n}} e^{-\langle x-\mu, \Sigma^{-1}(x-\mu) \rangle/2}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. Hier sind $\mu \in \mathbb{R}^n$, Σ eine positiv definite, symmetrische $(n \times n)$ -Matrix und $\det \Sigma$ die Determinante von Σ .



$$\mu = (-1, 1), \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist f die gemeinsame Dichte der Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n , so können wir μ als Vektor der Erwartungswerte $(\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n])$ identifizieren, und die Elemente von Σ sind die Varianzen bzw. Kovarianzen $\Sigma_{i,j} = \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]$.

- Die Randverteilungen sind wieder Normalverteilungen.

Satz

Die Zufallsgrößen X und Y seien unabhängig, mit existierenden Erwartungswerten.

- $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ existiert, und es gilt $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.
- Falls die Varianzen von X, Y existieren, so gilt $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.