

10. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 30. Juni, 11 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Geben Sie zu allen Aufgaben, in denen nach Wahrscheinlichkeiten gefragt wird, einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und geben Sie die Ereignisse als Teilmengen der Ereignismenge an. Klassifizieren Sie die auftretenden Abzählprobleme.

Hausaufgabe 10.I (*12 Punkte*). Ein Buch mit 400 Seiten enthält k Druckfehler, die zufällig und unabhängig verteilt sind.

- a) Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass auf der ersten Seite mindestens zwei Druckfehler vorkommen?
- b) Vergleichen Sie für alle $k \in \{400, 200, 50\}$ das exakte Ergebnis mit dem Ergebnis, das man durch die Poisson-Approximation erhält, sowie mit dem Ergebnis, das man durch Anwendung des lokalen zentralen Grenzwertsatzes erhält.

Hausaufgabe 10.II (*12 Punkte*). Bei der Muschelzucht gibt erfahrungsgemäß nur jede 50. Muschel eine Perle.

- a) Betrachten Sie das Zufallsexperiment, das gegeben ist durch das Überprüfen von N Muscheln auf Perlen. Welche Verteilung hat die Anzahl S_N der gefundenen Perlen? Was für Annahmen machen Sie?
- b) Wie groß ist die erwartete Anzahl von Perlen, wenn 100 Muscheln geöffnet werden? Bestimmen Sie auch die Varianz dieser Zufallsgröße. (Sie dürfen die allgemein gültigen, aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke verwenden.)
- c) Wie groß ist die exakte Wahrscheinlichkeit, unter 100 Muscheln $k = 0, 1, 5, 10$ Perlen zu finden? Geben Sie jeweils die exakte Lösung, die Approximation mit Hilfe des lokalen Grenzwertsatzes und die Poisson-Approximation an.
- d) Wie viele Muscheln müssen geöffnet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% mindestens eine Perle zu finden?

Hausaufgabe 10.III (12 Punkte). Unter 100 Personen ist im Schnitt eine farbenblind.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 zufällig ausgewählten Personen zwei oder mehr farbenblinde Personen befinden. Tun Sie dies zunächst exakt und dann mit Hilfe sowohl der Poisson- als auch der Normal-Approximation.
- b) Wie viele Personen müssen zufällig ausgewählt werden, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% unter ihnen mindestens eine farbenblinde Person befindet? Führen Sie die Berechnung wiederum zunächst exakt und dann mit Hilfe der Poisson- und Normalapproximation.

Hausaufgabe 10.VI (12 Punkte). Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr ausgerüstet treten wir einem radioaktivem Präparat gegenüber. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass pro Sekunde 300 000 Teilchen zerfallen und dass jeder einzelne Zerfall von einem Geiger-Zähler mit Wahrscheinlichkeit $3 \cdot 10^{-6}$ registriert und signalisiert wird (unabhängig und identisch).

- a) Geben Sie einen geeigneten W'Raum an und eine Zufallsvariable S , die (durch den Geiger-Zähler) signalisierte Teilchen in einer Sekunde zählt.
- b) Bestimmen Sie das kleinste K , so dass die (approximative) W'keit, mehr als K Teilchenzerfälle in einer Sekunde zu registrieren, unter 1% sinkt. Begründen Sie die von Ihnen genutzte Approximation.
- c) Schätzen Sie den folgenden Fehler mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung ab:

$$|P(S \leq 15) - \text{Poi}_\lambda(\{0, 1, 2, \dots, 15\})|$$