

## Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 9 - Teil A

Abgabe bis **Donnerstag, 15.12.2011, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Dr. Jason Uhing (PF 101), Dr. Shun-Xiang Ouyang (PF 53) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

### Übungsaufgabe 9.I

Es sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum und  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  sei  $\mathcal{F} - \mathcal{F}$ -messbar. Im folgenden wird ein  $T$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  als *T-ergodisch* bezeichnet, wenn  $T$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ergodisch ist. Zeigen Sie:

1. Die Menge

$$I := \{ \mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \mid \mathcal{P} \text{ ist ein } T\text{-invariantes W'Maß} \}$$

ist konvex, d.h. für alle  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in I$  und alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt:

$$\lambda \mathbb{P}_1 + (1 - \lambda) \mathbb{P}_2 \in I.$$

2. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} \in I$  ist genau dann ein Extrempunkt der konvexen Menge  $I$ , wenn es  $T$ -ergodisch ist. (Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} \in I$  heißt *Extrempunkt* von  $I$ , wenn aus  $\mathbb{P} = \lambda \mathbb{P}_1 + (1 - \lambda) \mathbb{P}_2$  stets  $\lambda \in \{0, 1\}$  folgt.)

*Hinweise zu b):*

" $\Rightarrow$ " Stellen Sie ein nicht-ergodisches Maß  $\mathbb{P} \in I$  als Konvexkombination zweier Maße  $B \mapsto \mathbb{P}[B|A]$  und  $B \mapsto \mathbb{P}[B|A^c]$  für eine geeignet gewählte Menge  $A$  dar.

" $\Leftarrow$ " Betrachten Sie ein Maß  $\mathbb{P} \in I$ , das kein Extrempunkt von  $I$  ist, das heißt, es existieren  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in I, \mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$  und  $\lambda \in (0, 1)$  mit  $\mathbb{P} = \lambda \mathbb{P}_1 + (1 - \lambda) \mathbb{P}_2$ . Bestimmen Sie im Fall, dass  $\mathbb{P}_1$  und  $\mathbb{P}_2$  ergodisch sind, die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P} \left[ \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_A(T^j(\omega)) = \mathbb{P}_1[A] \right\} \right]$$

für eine geeignete Menge  $A$ .

### Übungsaufgabe 9.II

Es seien  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  zwei gemeinsam normalverteilte Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  und  $a := \mathbb{E}[X]$ ,  $b = \mathbb{E}[Y]$  sowie  $A = \Sigma(X)$ ,  $B = \Sigma(Y)$ ,  $C = \text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])^t]$  seien die zugehörigen Erwartungswerte und Kovarianzmatrizen. Die Verteilung von  $Y$  sei nicht degeneriert, d.h.,  $B$  sei invertierbar. Für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  sei  $Q(y, \cdot) : \mathcal{B}_m \rightarrow [0, 1]$  die  $m$ -dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswert  $q_y := a + CB^{-1}(y - b)$  und Kovarianzmatrix  $D := A - CB^{-1}C^t$ . Zeigen Sie, dass  $Q$  eine reguläre bedingte Verteilung von  $X$  gegeben  $Y$  ist, in dem Sie folgendes nachweisen:

- Für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  ist  $Q(y, \cdot)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ .
- Für alle  $M \in \mathcal{B}_m$  ist  $Q(\cdot, M)$  eine  $\mathcal{B}_n - \mathcal{B}$ -messbare Funktion.
- Für alle  $M \in \mathcal{B}_m, N \in \mathcal{B}_n$  gilt  $\mathbb{P}(X, Y)^{-1}(M \times N) = \int_N Q(y, M) \mathbb{P}Y^{-1}(dy) = (\mathbb{P}Y^{-1} \otimes Q)(N \times M)$ .

*Hinweise*

- Zeigen Sie zunächst, dass  $Q(y, M) = Q(0, M_y)$  mit  $M_y := \{v - CB^{-1}y : v \in M\}$  für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  gilt. Zeigen Sie dann, dass  $\{y \in \mathbb{R}^n : Q(y, (-\infty, t]) < \alpha\}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und alle Mengen  $(-\infty, t] := (-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_m] \subset \mathbb{R}^m$  offen ist. Betrachten Sie nun das Dynkin-System  $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{B}_m : Q(\cdot, M) \text{ ist } \mathcal{B}_n - \mathcal{B}\text{-messbar}\}$ .
- Zeigen Sie, dass die charakteristischen Funktionen von  $\mathbb{P}(X, Y)^{-1}$  und  $\mathbb{P}Y^{-1} \otimes Q$  gleich sind. Sie dürfen hier das folgende Resultat verwenden:

**Satz:** Für  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  und  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  messbare Räume,  $\mu$  ein W-Maß auf  $(E_1, \mathcal{E}_1)$ ,  $K$  ein Markoffkern von  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  nach  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  und  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, \infty]$  eine  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -messbare numerische Funktion gilt

$$\int_{E_1 \times E_2} f(\omega_1, \omega_2) (\mu \otimes K)(d(\omega_1, \omega_2)) = \int_{E_1} \int_{E_2} f(\omega_1, \omega_2) K(\omega_1, d\omega_2) \mu(d\omega_1).$$

Die gleiche Formel gilt, wenn  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ -messbare,  $\mu \otimes K$ -integrierbare Funktion ist.

### Übungsaufgabe 9.III

Es sei  $(X, Y)$  ein zweidimensionaler Zufallsvektor, dessen Verteilung  $\mathbb{P}(X, Y)^{-1}$  eine Dichte  $f$  bezüglich des Lebesgue'schen Maßes  $\lambda^2$  besitzt. Ferner bezeichne  $f_X$  mit  $f_X(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \lambda(dy)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Randdichte von  $X$ . Zeigen Sie für alle  $B \in \mathcal{B}$ , dass die Funktion

$$g_B(x) := \begin{cases} \int_B \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \lambda(dy) & \text{falls } f_X(x) \in (0, \infty) \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

eine Version der bedingten Wahrscheinlichkeit von  $\{Y \in B\}$  gegeben  $X$  ist.

*Hinweis:* Zeigen Sie mit der Definition, dass  $g_B \in \mathbb{P}_{\{Y \in B\} | X = \cdot}$  für alle  $B \in \mathcal{B}$  gilt. Sie können dabei folgenden Satz verwenden:

**Satz:** Es seien  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$  und  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und  $h : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$  eine  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ -messbare numerische Funktion. Dann sind die numerischen Funktionen  $\varphi : \Omega_1 \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\varphi(x) := \int_{\Omega_2} h(x, y) \mu_2(dy)$  und  $\psi : \Omega_2 \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\psi(y) := \int_{\Omega_1} h(x, y) \mu_1(dx)$   $\mathcal{F}_1$ - beziehungsweise  $\mathcal{F}_2$ -messbar.