

4. Aufgabenblatt zur Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe bis Donnerstag, 3.5.2012, 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 4.I

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung.

- (a) Zeigen Sie: Für $0 < t < u$ ist $B_t - \frac{t}{u}B_u$ unabhängig von B_u .
- (b) Berechnen Sie $\mathbb{E}(B_t | B_s)$ für alle $t, s \geq 0$.

Aufgabe 4.II

Analysieren Sie den Beweis der Tatsache, daß fast alle Pfade der Brownschen Bewegung nirgends differenzierbar sind.

- (a) Zeigen Sie mit der gleichen Beweisidee, daß für jedes $\gamma > 5/6$ gilt: Fast alle Pfade der Brownsche Bewegung sind nirgends Hölder-stetig mit Exponent γ .
- (b) Zeigen Sie, daß diese Aussage für jedes $\gamma > 1/2$ gilt, indem Sie im Beweis k Inkremente statt drei Inkremente verwenden (für ein geeignetes k).

Aufgabe 4.III

- (a) Es seien zwei $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ -Stoppzeiten σ, τ gegeben. Zeigen Sie, daß auch $\min\{\sigma, \tau\}$, $\max\{\sigma, \tau\}$ und $\sigma + \tau$ jeweils $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ -Stoppzeiten sind.
- (b) Es sei τ eine Stoppzeit bezüglich einer Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ und

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \forall t\} .$$

Zeigen Sie:

- (i) \mathcal{F}_τ ist eine σ -Algebra. (*Hier können Sie sich kurzfassen.*)
- (ii) Ist die Stoppzeit τ deterministisch (konstant) mit $\tau(\omega) = t$ für alle ω , so gilt $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$.
- (iii) Sind σ und τ zwei Stoppzeiten bezüglich der gleichen Filtrierung, so sind die Mengen $\{\sigma < \tau\}$, $\{\sigma \leq \tau\}$ und $\{\sigma = \tau\}$ alle in $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$.

Aufgabe 4.IV (Vortragsvorbereitung)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag, den 7.5.2012, einen Kurzvortrag zu unten stehendem Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren.

Blumenthals 0-1-Gesetz und das Verhalten der Brownschen Bewegung bei Null.