

Wahrscheinlichkeitstheorie II - Übungsblatt 6

Abgabe bis **Donnerstag, 24.5.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters der Übungsgruppe (*Daniel Altemeier (PF 161) im Kopierraum V3-128*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Übungsaufgabe 6.I

Seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathcal{C}_0([0, \infty), \mathbb{R})$ stochastische Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

(i) Zeigen Sie, dass aus

$$\mathbb{E}[\psi(X)] = \mathbb{E}[\psi(Y)] \quad \text{für alle } \psi : \mathcal{C}_0([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar und beschränkt}$$

folgt, dass X und Y die gleiche Verteilung haben.

(ii) Sei $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ eine σ -Algebra. Es gelte

$$\mathbb{E}[\psi(X)\xi] = \mathbb{E}[\psi(X)]\mathbb{E}[\xi]$$

für alle $\tilde{\mathcal{A}}$ -messbaren, beschränkten $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $\psi : \mathcal{C}_0([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, die messbar und beschränkt sind. Zeigen Sie, dass X unabhängig ist von $\tilde{\mathcal{A}}$.

Übungsaufgabe 6.II

Seien $(B_t)_{t \geq 0}$ eine stetige Brownsche Bewegung und $\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma\{B_s : s \leq t\}$ sowie $\mathcal{F}_t := \tilde{\mathcal{F}}_{t+}$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass $(B_t)_{t \geq 0}$ die starke Markov-Eigenschaft besitzt.

Übungsaufgabe 6.III

Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für $0 < t_1 < t_2 < \infty$ gilt:

$$\mathbb{P}[B_t = 0 \text{ für ein } t \in (t_1, t_2)] = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{t_2}{t_1} - 1} \right).$$

Hinweis: Nutzen Sie Ihr Wissen über den ersten Zeitpunkt, in dem die Brownsche Bewegung ein gegebenes $b \in \mathbb{R}$ erreicht und betrachten Sie die im Zeitpunkt t_1 neugestartete Brownsche Bewegung.

Übungsaufgabe 6.IV (Vortragsvorbereitung)

Bereiten Sie für das Tutorium am Montag den 28.5.2012 einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Die starke Markov-Eigenschaft für die Brownsche Bewegung.