Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung ist in Abbildung 1.3 skizziert, deren Dichte in Abbildung 1.5.

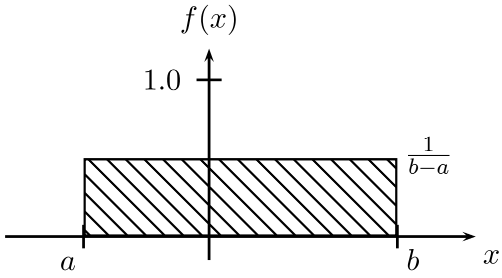

Abbildung 1.5: Dichtefunktion der kontinuierlichen Gleichverteilung auf $[a, b]$

1.7 Erwartungswert und Varianz

Definition 1.12 (Erwartungswert, Varianz)**.** Ist X eine diskrete ZV, so heißt

$$\underline{m} := \mathbb{E}(X) := \sum_i x_i \, \mathbb{P}(X = x_i) \tag{1.40}$$

ihr **Erwartungswert**. Ist X kontinuierlich und besitzt eine Dichte f, setzen wir für eine allgemeine Funktion g

$$\mathbb{E}(g(X)) := \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.41}$$

Insbesondere heißt dann

$$\underline{m} := \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.42}$$

der **Erwartungswert** von X. Weiter heißt $V := \mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\big((X - \underline{m})^2\big)$ die **Varianz** von X, und $\sigma := \sqrt{V}$ die **Standardabweichung** von X. Wir fordern, dass die entsprechenden Summen oder Integrale absolut konvergieren. Dann sind die obigen Größen wohldefiniert und (endliche) reelle Zahlen.

Bemerkung. Absolute Konvergenz bedeutet $\sum_i |x_i| \, \mathbb{P}(X = x_i) < \infty$ für den Erwartungswert einer diskreten ZV oder $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| \, f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ für Erwartungswerte $\mathbb{E}(g(X))$ für eine kontinuierliche ZV mit Dichte $f(x)$. Der Erwartungswert $\mathbb{E}(g(X))$ für diskrete ZV ist analog erklärt. Überlegen Sie sich diese Definition! Beispiele für Verteilungen ohne Erwartungswert gibt es auch, eines wird in den Übungen behandelt.

Beispiel. Die Gleichverteilung, Fortsetzung des Beispiels von oben. Für den Erwartungswert gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Deuten Sie das Ergebnis geometrisch! Zur Berechnung der Varianz verwenden wir folgende wichtige Rechenregel, die wir schon aus dem diskreten Fall kennen.

Lemma 1.13. Sofern Erwartungswert und Varianz existieren, gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big((X-\underline{m})^2\big) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2. \tag{1.43}$$

Beweis. Die früher durchgeführte Rechnung bleibt auch für den kontinuierlichen Fall gültig:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((X-\underline{m})^2\big) &= \mathbb{E}\big(X^2 - 2\underline{m}\,X + \underline{m}^2\big) \\ &= \mathbb{E}\big(X^2\big) - 2\underline{m}\,\mathbb{E}(X) + \underline{m}^2 \qquad \text{(Linearität!)} \\ &= \mathbb{E}\big(X^2\big) - \underline{m}^2 = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Damit ergeben sich für das zweite Moment und für die Varianz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\cdot\big(b^3-a^3\big) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}, \\ V &= \frac{1}{3}\big(b^2+ab+a^2\big) - \frac{1}{4}\big(a^2+2ab+b^2\big) = \frac{(a-b)^2}{12}, \\ \sigma &= \frac{|b-a|}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Vergleichen Sie diese Formeln auch mit den entsprechenden Ausdrücken für die diskrete Gleichverteilung.

Für den Erwartungswert und die Varianz gelten die folgenden Rechenregeln.

ZV	**Erwartungswert**	**Varianz**	**Standardabweichung**
X	$\underline{m}$	$V = \sigma^2$	σ
a	a	0	0
$a + X$	$a + \underline{m}$	σ^2	σ
cX	$c\underline{m}$	$c^2\sigma^2$	$\lvert c\rvert \cdot \sigma$
$a + cX$	$a + c\underline{m}$	$c^2\sigma^2$	$\lvert c\rvert \cdot \sigma$

Dabei ist die “Zufallsvariable” a in der zweiten Zeile diejenige diskrete ZV, die den Wert a mit Wahrscheinlichkeit 1 annimmt. Zudem sei c eine reelle Konstante. Die Ausdrücke für den Erwartungswert und die Varianz der restlichen ZV lassen sich anhand von Definition 1.12 bestimmen, mit $g(X) = a + cX$.

1.8 Die Normalverteilung

Die sogenannte **Standard-Normalverteilung** $\mathcal{N}(0,1)$ ist definiert über die Dichtefunktion

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.44}$$

Die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$ ist gegeben durch

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1.45}$$

Skizzieren Sie diese Funktionen! Diese Verteilungsfunktion findet man auch tabelliert (siehe Kapitel 8), weil sie in vielen Anwendungen auftritt. Mit ihr läßt sich beispielsweise die Wahrscheinlichkeit eines Intervall-Ereignisses angeben, siehe Gleichung (1.36).

Normierung: Wir substituieren und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} F(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\mathrm{d}y \;\overset{y=\sqrt{2}\cdot z}{=}\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z \;=\; 1. \tag{1.46}$$

Es gibt einen eleganten Weg, das letzte Integral zu bestimmen, der in den Übungen besprochen wird.

Erwartungswert: Es gilt

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \int_{\mathbb{R}} x\,f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0, \tag{1.47}$$

was unmittelbar aus der Symmetrie $f(x) = f(-x)$ der Dichtefunktion folgt (denn dann definiert $x \mapsto x\,f(x)$ eine ungerade Funktion, aber der Integrationsbereich ist symmetrisch), da das Integral sicher existiert.

2. Moment: Wir verwenden partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X^2\big) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\,\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\left(2y\,\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{d}y \\
&=\; \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\, y\,\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=\,0} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y \;=\; 1.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

Für die **Varianz** folgt damit $V = \mathbb{V}(X) = 1$.

In der Praxis tauchen meist verschobene und skalierte Varianten von $f(x)$ auf mit $\widetilde{f}(y) = \frac{1}{\sigma} f\big(\frac{y-m}{\sigma}\big)$, also $X = (\widetilde{X} - m)/\sigma$ oder $\widetilde{X} = m + \sigma X$ für die zugehörigen ZVn. Mit den Rechenregeln aus der obigen Tabelle ergibt sich also:

Definition und Satz 1.14 (Normalverteilung)**.** Die **Normalverteilung** $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist gegeben durch die Dichte

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\!\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.49}$$

Sie besitzt den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2. □

Für konstanten Erwartungswert μ ist die Dichte der Normalverteilung für verschiedene Werte der Varianz σ^2 unten skizziert.

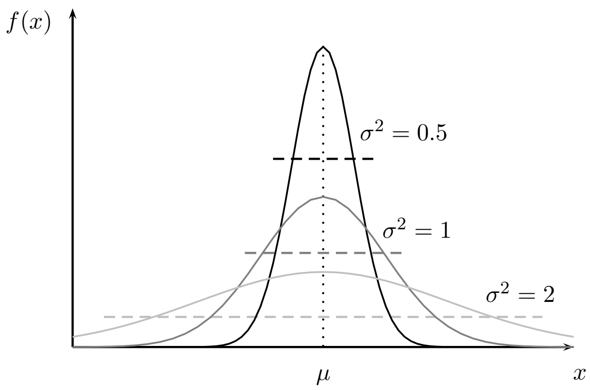

Abbildung 1.6: Normalverteilung für verschiedene Varianzen σ^2, bei gleichem μ.

Beachten Sie, dass für die Verteilungsfunktion $F_{\mu,\sigma}(x)$ der Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 die Beziehung

$$F_{\mu,\sigma^2}(x) \;=\; F_{0,1}\!\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{1.50}$$

erfüllt ist. Diese Beziehung rechnet man einfach mit der Substitutionsregel nach. Also kann man die Wahrscheinlichkeit von Intervall-Ereignissen für die allgemeine Normalverteilung stets mit der Verteilungsfunktion für die Standard-Normalverteilung ausdrücken (vergleichen Sie dazu die entsprechenden Übungsaufgaben).

1.9 Die charakteristische Funktion

Für viele Rechnungen benötigt man geschickte Hilfsmittel. Eines aus der Analysis ist die **charakteristische Funktion**.

Definition 1.15 (charakteristische Funktion)**.** Sei X eine ZV. Dann heißt

$$\phi_X(t) := \mathbb{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\big) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{1.51}$$

die **charakteristische Funktion** der Zufallsvariable X. Hierbei ist i die imaginäre Einheit mit $\mathrm{i}^2 = -1$.

Bemerkung. Gemäß Definition 1.12 treten in der obigen Definition zwei Fälle auf, je nachdem ob X diskret oder kontinuierlich ist. Beachten Sie wieder die formale Analogie beider Ausdrücke.

i) X ist diskret. Dann gilt $\phi_X(t) = \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_j}\, \mathbb{P}(X = x_j)$.

ii) X ist kontinuierlich mit Dichte $f(x)$. Dann ist $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Das Integral in Fall (ii) kann man berechnen, indem man die Exponentialfunktion in Realteil und Imaginärteil aufspaltet, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} = \cos(tx) + \mathrm{i}\sin(tx)$, und dann die entsprechenden reellen Integrale auswertet. Schneller geht es, wenn man eine Stammfunktion des Integranden kennt, siehe unten.

In beiden Fällen ist die charakteristische Funktion für alle reellen Werte von t wohldefiniert. Dies folgt aus der Nomierungsbedingung, welche die absolute Konvergenz und damit auch die gewöhnliche Konvergenz der obigen Ausdrücke nach sich zieht, wie man unschwer nachrechnen kann.

Beispiel. Wir geben jeweils ein Beispiel für den kontinuierlichen Fall und den diskreten Fall an.

Die **Exponentialverteilung** mit Parameter $\lambda > 0$ ist gegeben durch die Dichte

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.52}$$

Dann ist

$$\phi_\lambda^{(E)}(t) = \lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x + \mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\mathrm{i}t - \lambda}\,\mathrm{e}^{-(\lambda - \mathrm{i}t)x}\Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t}. \tag{1.53}$$

Hierbei haben wir eine Stammfunktion des Integranden benutzt. Beachten Sie für die Integrationsgrenzen $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} = 0$, was aus $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}| = 1$ folgt, unabhängig vom Wert von λ (stets positiv) und t.

Die **Poisson-Verteilung** ist für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch die elementaren Wahrscheinlichkeiten $p_n = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \phi_\lambda^{(P)}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tn}\, \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(\lambda\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)^n}{n!} \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\, \exp\big(\lambda\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big) = \exp\big(\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1)\big). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Die Nützlichkeit der charakteristischen Funktion zeigt der folgende Satz.

Satz 1.16. Sei ϕ die charakteristische Funktion zur ZV X. Letztere besitze den Erwartungswert $\underline{m}$ und die Varianz V. Dann gilt:

1. $\phi(0) = 1$,
2. $\underline{m} = -\mathrm{i}\, \phi'(0)$,
3. $V = -\phi''(0) + \big(\phi'(0)\big)^2$.

Beweis. Wir führen den Beweis für den kontinuierlichen Fall und erhalten

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) = 1, \\ \phi'(0) &= \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} x\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\, \mathrm{d}x \,\Big|_{t=0} = \mathrm{i}\, \mathbb{E}(X) = \mathrm{i}\, \underline{m}, \\ \phi''(0) &= - \int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\, \mathrm{d}x \,\Big|_{t=0} = -\mathbb{E}\big(X^2\big). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Varianz $V = -\phi''(0) + \big(\phi'(0)\big)^2$. Beachten Sie, dass alle Operationen wegen der Existenz von $\underline{m}$ und V erlaubt sind. Der diskrete Fall wird mit denselben Argumenten geführt, indem man die üblichen Ersetzungen vornimmt, also $\int_{\mathbb{R}}$ durch $\sum_{x \in X(\Omega)}$ ersetzt sowie $f(x)\, \mathrm{d}x$ durch $\mathbb{P}(X = x)$. □

Bemerkung. Allgemeiner notiert man $\mathrm{d}F(x) = f(x)\, \mathrm{d}x$ und kann dann über eine Erweiterung des Integralbegriffs (zum Lebesgue–Stieltjes-Integral) kontinuierliche und diskrete Fälle “in einem Rutsch” erfassen (siehe dafür: Billingsley oder Lang).

Sofern das **n-te Moment** $\mathbb{E}(X^n)$ existiert, bekommt man ganz allgemein (mit einer Rechnung analog zu obigem Beweis) die Formel

$$\mathbb{E}\big(X^n\big) = (-\mathrm{i})^n\, \phi^{(n)}(0). \tag{1.55}$$

Falls die Funktion $\phi(t)$ mit ihrer **Taylor-Reihe** um 0 übereinstimmt (was voraussetzt, dass diese Reihe existiert), gilt also

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(0)\, \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n\, \mathbb{E}(X^n)\, \frac{t^n}{n!}. \tag{1.56}$$

Die charakteristische Funktion ist in diesem Fall also die **erzeugende Funktion** für die Momente von X. Man kennt dann alle Momente von X!

Beispiel. Für die *Exponentialverteilung* mit $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\phi_\lambda^{(E)}(t) &\overset{(1.53)}{=} \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t} = \frac{1}{1-\mathrm{i}\frac{t}{\lambda}} \overset{|t|<\lambda}{=} 1 + \mathrm{i}\frac{t}{\lambda} + (\mathrm{i}\frac{t}{\lambda})^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{\lambda^n}\, t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\mathrm{i}^n n!}{\lambda^n}}_{=\left(\phi_\lambda^{(E)}\right)^{(n)}(0)} \frac{t^n}{n!}.\end{aligned} \tag{1.57}$$

Also erhalten wir für das n-te Moment den Ausdruck

$$\mathbb{E}\big(X^n\big) = \frac{n!}{\lambda^n}. \tag{1.58}$$

Alternativ kann man per Induktion nachrechnen:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}t} = \frac{\mathrm{i}^n\, n!\, \lambda}{(\lambda - \mathrm{i}t)^{n+1}},$$

aber das ist schwieriger als die Bestimmung mittels der geometrischen Reihe und Gleichung (1.57).

Beispiel. Für die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ bekommt man

$$\phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x}_{=:\psi(t)} = \mathrm{e}^{-t^2/2}.$$

Das kann man folgendermaßen beweisen: Die Funktionen $\psi(t)$ und $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ erfüllen beide das Anfangswertproblem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t) = -t\, f(t) \quad \text{mit } f(0) = 1.$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme folgt dann die Gleichheit. Konsultieren Sie hierzu ein Buch über Differentialgleichungen, und rechnen Sie die Behauptung für beide Funktionen nach! In Kapitel 3.5 werden wir diese charakteristische Funktion noch einmal genauer untersuchen.