

Schließende Statistik

Neil Mañibo

Universität Bielefeld

05.07.2024

6.2: Schätzung von Konfidenzintervallen

Wiederholung

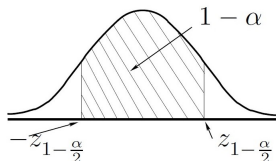


Abbildung 6.3: Die Werte der ZV Z sollen mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ in ein symmetrisches Intervall um 0 fallen. Es sind die entsprechenden Quantile eingetragen.

$$\mathbb{P}\left(Z \in \left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1 - \alpha \quad \text{für } Z \in \mathcal{N}(0, 1)$$

Allgemeinerer Fall: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(X \in \left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma, \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right]\right) = 1 - \alpha$$

Notation: $\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma, \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right] := \left[\mu \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right]$

(**Breite:** $2\delta = 2z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma$, δ : maximale Abweichung von μ)

Allgemeinerer Fall: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(X \in \left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma, \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right]\right) = 1 - \alpha$$

Notation: $\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma, \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right] := \left[\mu \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma\right]$

(**Breite:** $2\delta = 2z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma$, δ : maximale Abweichung von μ)

Insbesondere gilt für den Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$:

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} \in \left[\mu \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \simeq 1 - \alpha, \quad (6.11)$$

da $\bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Beispiel

Frage

Wie oft muss man (mit einem idealen Würfel) mindestens würfeln, damit der Mittelwert der Augenzahl mit 95% Wahrscheinlichkeit zwischen 3.4 und 3.6 liegt?

Beispiel

Frage

Wie oft muss man (mit einem idealen Würfel) mindestens würfeln, damit der Mittelwert der Augenzahl mit 95% Wahrscheinlichkeit zwischen 3.4 und 3.6 liegt?

- $\mu = 3.5$ (Erwartungswert)
- $\sigma^2 = 2.917$ (Varianz)
- $\delta = 0.1$ (maximale Abweichung)
- $z_{0.975} = 1.96$ ($(1 - \frac{\alpha}{2})$ -quantil für $\alpha = 0.05$)

$$\Rightarrow n = \frac{1.96^2 \cdot 2.917}{0.1^2} \simeq 1121$$

Konfidenzintervall

$$\overline{X} \in [\mu \pm \delta] \iff \mu \in [\overline{X} \pm \delta] \quad (\text{warum?})$$

$$\mathbb{P} \left(\mu \in \left[\overline{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right) \simeq 1 - \alpha, \quad (6.13)$$

- $\left[\overline{X} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$: **Konfidenzintervall** (KI) für den Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$
- Bemerkung: das obige Intervall ist ein *zufälliges* Intervall!

Konfidenzintervall

Definition (Def. 6.2)

Seien C_1 und C_2 (mit $C_1 < C_2$) ZV auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei u ein reeller Parameter, und $0 < \alpha < 1$ eine reelle Zahl. Das zufällige Intervall $[C_1, C_2]$ heißt **Konfidenzintervall (KI) für den unbekannten Parameter u zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$** , wenn die Beziehung

$$\mathbb{P}(C_1 \leq u \leq C_2) = 1 - \alpha$$

erfüllt ist.

Konfidenzintervall

Realisierung von $[C_1, C_2]$ (z.B. durch eine Stichprobe)
 $= [c_1, c_2]$: beobachtete KI

Achtung!

- **Falsch:** u liegt in $[c_1, c_2]$ mit $(1 - \alpha)\%$ Wahrscheinlichkeit
- **Richtig:** Die Aussage " $u \in [c_1, c_2]$ " ist in $(1 - \alpha)\%$ aller Fälle (Realisierungen) richtig

Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung

Fall (a) Varianz ist bekannt

Gegeben: eine Stichprobe von Umfang n mit MW $\bar{x}$

Voraussetzung: X normalverteilt (oder n gross genug ist, damit die Normalapproximation anwendbar ist)

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \sigma^2 \text{ ist bekannt} \implies$$

KI für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$:

$$\left[\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Fall (b) Varianz ist unbekannt

Falls σ^2 **unbekannt ist**, müssen wir mit der **empirischen Varianz** s^2 arbeiten! Betrachte die ZV:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

S^2 : ZV für die empirische Varianz

Fall (b) Varianz ist unbekannt

Falls σ^2 **unbekannt ist**, müssen wir mit der **empirischen Varianz** s^2 arbeiten! Betrachte die ZV:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

S^2 : ZV für die empirische Varianz

Die ZV T ist **Student-t-verteilt** (t_{n-1} -verteilt).

- $t_{n-1,q}$: das q -Quantil der t_{n-1} -Verteilung
- $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{n-1} = \mathcal{N}(0, 1) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n-1,q} = z_q$
- Für $n \geq 30$: $t_{n-1,q} \simeq z_q$

Verteilungstabelle: Student-t-Verteilung

q	$P(T \leq t)$						
	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
k	$t_{k,0.6}$	$t_{k,0.75}$	$t_{k,0.9}$	$t_{k,0.95}$	$t_{k,0.975}$	$t_{k,0.99}$	$t_{k,0.995}$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.997
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

① $t_{7,0.9} = 1.415$

② $t_{14,0.975} = 2.145 > 1.96 = z_{0.975}$

Abbildung 2: Tabelle der Quantile $t_{k,q}$ der Studentischen t-Verteilung. Die Zeilen geben bei festem Wert $k = (n - 1)$ des Freiheitsgrades Quantile für typische Werte von q . Die letzte Zeile (∞) führt die entsprechenden q -Quantile z_q der Standardnormalverteilung auf.

Fall (b) Varianz ist unbekannt

Falls σ^2 **unbekannt ist**, müssen wir mit der **empirischen Varianz** s^2 arbeiten! Betrachte die ZV:

$$T := \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

S^2 : ZV für die empirische Varianz

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 **ist unbekannt** $\implies$

KI für μ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$:

$$\left[\bar{x} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Konfidenzintervall für den Parameter p eines Bernoulli-Experiments

KI für p , $X \sim \text{Ber}(p)$

- ❶ Schätzer für p : $\hat{p} = \frac{n_A}{n}$
- ❷ Schätzer für die Varianz: $s^2 \simeq \hat{p}(1 - \hat{p})$

$$X \sim \text{Ber}(p), \text{ } n\hat{p}(1 - \hat{p}) \geq 9 \implies$$

KI für p zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$:

$$\left[\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}{\sqrt{n}} \right] \quad (6.15)$$

KI für p , $X \sim \text{Ber}(p)$

- ❶ Schätzer für p : $\hat{p} = \frac{n_A}{n}$
- ❷ Schätzer für die Varianz: $s^2 \simeq \hat{p}(1 - \hat{p})$

$$X \sim \text{Ber}(p), \text{ } n\hat{p}(1 - \hat{p}) \geq 9 \implies$$

KI für p zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$:

$$\left[\hat{p} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}}{\sqrt{n}} \right] \quad (6.15)$$

Bem: Hier ist die Varianz auch unbekannt aber n ist groß genug, und daher $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \simeq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Das Geburtenbeispiel

Beispiel

Die Geburtstatistik der Schweiz weist zwischen 1950 und 1970 $n = 1944700$ Geburten aus, davon $n_J = 997600$ Jungengeburten. Wie sehen die KI für die Wahrscheinlichkeit p einer Jungengeburt aus mit 99% bzw. 99.9% Konfidenzniveau?

Das Geburtenbeispiel

Beispiel

Die Geburtstatistik der Schweiz weist zwischen 1950 und 1970 $n = 1944700$ Geburten aus, davon $n_J = 997600$ Jungengeburten. Wie sehen die KI für die Wahrscheinlichkeit p einer Jungengeburt aus mit 99% bzw. 99.9% Konfidenzniveau?

- $\hat{p} = \frac{n_J}{n} = 0.512984$
- $s^2 = \hat{p}(1 - \hat{p}) = 0.249831$
- $0.99 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0.01 \rightsquigarrow z_{0.995} = 2.575$
- $0.999 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0.0010 \rightsquigarrow z_{0.9995} = 3.300$

99 % KI für p : $[0.51206, 0.51391]$

99.9 % KI für p : $[0.51190, 0.51416]$

6.3: Das Testen von Hypothesen

Grundbegriffe

- **Hypothese:** eine Annahme über eine Zufallsvariable (oder mehrere Zufallsvariablen)
- **(statistischer) Test:** ein Prüfverfahren, das man anwendet, um festzustellen, ob die Hypothese abgelehnt werden soll oder nicht (z.B. Gauß-Test, t-Test, χ^2 -Test)
- **Nullhypothese (H_0):** die zu prüfende Hypothese
- **Alternativhypothese (H_A):** die Entscheidung bei der Ablehnung von H_0

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt, μ aber unbekannt ist. Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n möchte man

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

überprüfen.

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt, μ aber unbekannt ist. Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n möchte man

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

überprüfen.

- ❶ **einfach:** Es handelt sich um nur **eine ZV** (X)
- ❷ **zweiseitig:** Abweichungen **in beiden Richtungen** sind relevant (zur Ablehnung von H_0)
- ❸ **Gauß-Test:** σ^2 ist **bekannt**

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt, μ aber unbekannt ist.
Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n möchte man

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

überprüfen.

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt, μ aber unbekannt ist.
Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n möchte man

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

überprüfen.

- Prüfgröße: $\bar{X}$
- Signifikanzniveau/Irrtumswahrscheinlichkeit: α (vorgegeben).
- Verteilung von $\bar{X}$ unter H_0 : $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt, μ aber unbekannt ist.
Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n möchte man

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

überprüfen.

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt, μ aber unbekannt ist.
Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n möchte man

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

überprüfen.

- **Verteilung von $\bar{X}$ unter H_0 :** $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$
- **Ablehnungsbereich:** H_0 ablehnen, falls $\bar{x}$ in den Bereich

$$\{\bar{x}: |\bar{x} - \mu_0| > \delta\} \quad \text{fällt,}$$

$$\text{wobei } \delta = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

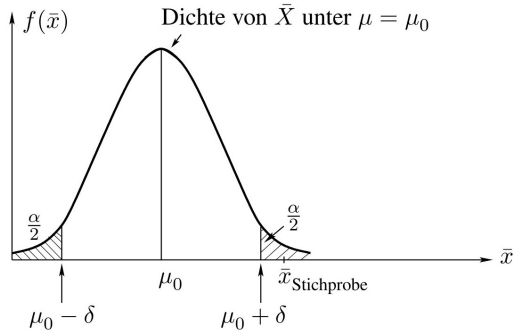


Abbildung 6.4: Prinzip des einfachen, zweiseitigen Gauß-Tests. μ_0 ist der Erwartungswert unter H_0 . Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn der Stichprobenmittelwert, hier mit $\bar{x}_{\text{Stichprobe}}$ bezeichnet, in den Ablehnungsbereich fällt.

Einfacher, zweiseitiger Gauß-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt, μ aber unbekannt ist. Mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang n möchte man

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

überprüfen.

- H_0 ablehnen, falls

$$\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

- Sonst, H_0 beibehalten.

Wie formuliert man die H_0 (bzw. H_A)?

Faustregel: H_0 ist “konservativ”: sie verneint i.d.R. Unterschiede, Veränderungen, Wirkung, u.s.w.

Wenn man einen vermuteten Zusammenhang erhärten wollte, wählt man als H_0 die Verneinung des Zusammenhangs. H_0 wird dann durch den Test abgelehnt, und H_A : der Zusammenhang wird als “statistisch signifikant” angesehen.

Geburtenbeispiel

Beispiel (einfacher, zweiseitiger, Gauß-Test)

Die Geburtstatistik der Schweiz weist zwischen 1950 und 1970 $n = 1944700$ Geburten aus, davon $n_J = 997600$ Jungengeburten. Sei p die Wahrscheinlichkeit einer Jungengeburt.

Geburtenbeispiel

Beispiel (einfacher, zweiseitiger, Gauß-Test)

Die Geburtstatistik der Schweiz weist zwischen 1950 und 1970 $n = 1944700$ Geburten aus, davon $n_J = 997600$ Jungengeburten. Sei p die Wahrscheinlichkeit einer Jungengeburt.

$$H_0: p = \frac{1}{2} \quad \text{gegen} \quad H_A: p \neq \frac{1}{2}$$

Signifikanzniveau: $\alpha = 0.001$

- Unter H_0 : $\mu_0 = p = \frac{1}{2}$, $\sigma^2 = p(1 - p) = \frac{1}{4}$
- $\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{\sigma} \sqrt{n} = \frac{|0.512984 - 0.5|}{0.5} \sqrt{1944700} = 36.2 > z_{0.9995} = 3.3$
- $\implies H_0$ wird **abgelehnt**.

Fehler beim Testen von Hypothesen

- **Fehler 1. Art:** Die Nullhypothese H_0 wird abgelehnt, obwohl sie richtig ist.
“False positive”
- **Fehler 2. Art:** Die Nullhypothese H_0 wird beibehalten, obwohl sie falsch ist.
“False negative”

Fehler beim Testen von Hypothesen

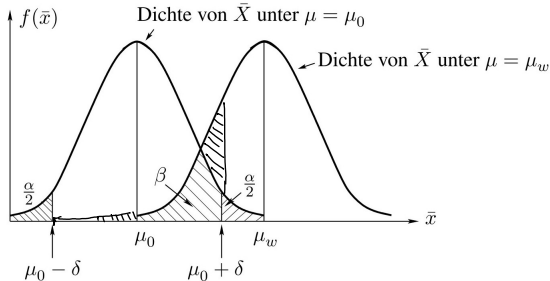


Abbildung 6.5: Fehler 1. Art und Fehler 2. Art im einfachen, zweiseitigen Gauß-Test. μ_0 ist der Erwartungswert unter H_0 , μ_w ist der wahre (aber unbekannte) Erwartungswert.

Einfacher, einseitiger Gauß-Test

Bisher: $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_0: \mu \neq \mu_0$

- zweiseitige Fragestellung
- große Abweichungen der Prüfgröße nach oben oder nach unten (bzgl. μ_0) führten zur Ablehnung der H_0

Falls nur Abweichungen **in einer Richtung** relevant sind, so ist die Fragestellung einseitig.

Hypothesenpaar beim einseitigen Test:

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \mu > \mu_0$$

oder

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \mu < \mu_0$$

Einfacher, einseitiger Gauß-Test

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \mu > \mu_0$$

- Bei einem einseitigen Test, wählen wir als Verteilung unter H_0 , die Verteilung “im ungünstigsten Fall” (H_0 ausgewertet mit dem Gleichheitszeichen)
- Begründung: Es garantiert, dass der Fehler 1. Art **höchstens** gleich dem vorgegebenen α ist.

Einfacher, einseitiger Gauß-Test

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \mu > \mu_0$$

- δ wählen, so dass

$$\mathbb{P}(\bar{X} - \mu_0 > \delta) = \alpha \quad \text{wenn} \quad \mu = \mu_0$$

- H_0 wird abgelehnt falls

$$\bar{X} - \mu_0 > \delta$$

Hier ist $\delta = z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (warum?)

zweiseitiger vs einseitiger Gauß-Test

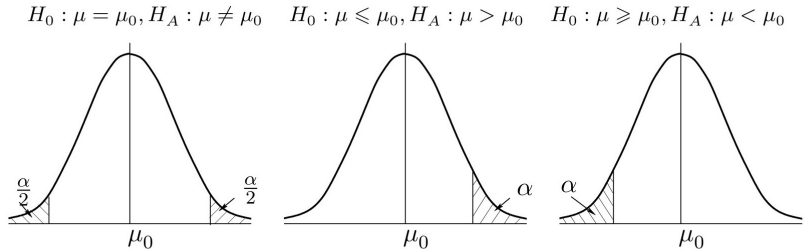


Abbildung 6.6: Zweiseitiger Test (links) und einseitige Tests (Mitte und rechts).

Einfacher, einseitiger Gauß-Test

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \mu > \mu_0$$

- H_0 ablehnen falls

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} > z_{1-\alpha}$$

- **Achtung!** Bei **einseitigen** Gauß-Tests $z_{1-\alpha}$ statt $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$!

Einfacher, einseitiger Gauß-Test

Analog gilt für die andere Variante:

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_A: \mu < \mu_0$$

- H_0 wird abgelehnt falls

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n} < -z_{1-\alpha}$$

Einfacher, zweiseitiger t-Test

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 und μ beide unbekannt sind.

$\implies$ man nutzt die empirische Varianz s und die Quantile der Student-t-Verteilung ($t_{n-1,q}$), um die Ablehnungsbereiche zu konstruieren.

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu \neq \mu_0$$

- H_0 wird abgelehnt falls

$$\frac{|\bar{x} - \mu_0|}{s} \sqrt{n} > t_{n-1, 1 - \frac{\alpha}{2}}$$

Einfacher, einseitiger t-Tests

$$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu > \mu_0$$

- H_0 wird abgelehnt falls

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} > t_{n-1, 1-\alpha}$$

$$H_0: \mu \geq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu < \mu_0$$

- H_0 wird abgelehnt falls

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n} < -t_{n-1, 1-\alpha}$$

Beispiel

Beispiel

Ist der Cholesterinwert von Vegetariern signifikant ($\alpha = 0.01$) geringer als der Normalwert ($180 \text{ mg}/100 \text{ ml}$)? Bei einer Gruppe von 9 Vegetariern werden folgende Werte gemessen:

154	119	177	150	138	185	167	158	174
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Man wollte einen zutreffenden Test durchführen, um die obige Frage zu beantworten.

Beispiel

Beispiel

Ist der Cholesterinwert von Vegetariern signifikant ($\alpha = 0.01$) geringer als der Normalwert ($180 \text{ mg}/100 \text{ ml}$)? Bei einer Gruppe von 9 Vegetariern werden folgende Werte gemessen:

154	119	177	150	138	185	167	158	174
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Man wollte einen zutreffenden Test durchführen, um die obige Frage zu beantworten.

- geeigneter Test: einfacher, einseitiger, t-Test (Varianz ist unbekannt!)
- $\bar{X}$: Mittelwert der Cholesterinwerten
- Hypothesenpaar:

$$H_0: \mu \geq 180 \quad \text{gegen} \quad H_A: \mu < 180$$

Beispiel

Beispiel (einfacher, einseitiger, t-Test)

Ist der Cholesterinwert von Vegetariern signifikant ($\alpha = 0.01$) geringer als der Normalwert ($180 \text{ mg}/100 \text{ ml}$)? Bei einer Gruppe von 9 Vegetariern werden folgende Werte gemessen:

154	119	177	150	138	185	167	158	174
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Beispiel

Beispiel (einfacher, einseitiger, t-Test)

Ist der Cholesterinwert von Vegetariern signifikant ($\alpha = 0.01$) geringer als der Normalwert ($180 \text{ mg}/100 \text{ ml}$)? Bei einer Gruppe von 9 Vegetariern werden folgende Werte gemessen:

154	119	177	150	138	185	167	158	174
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- $H_0: \mu \geq 180$ gegen $H_A: \mu < 180$
- $\frac{(x - \mu_0)}{s} \sqrt{n} = \frac{158 - 180}{20.7} \sqrt{9} = -3.19 < -2.90 = -t_{8,0.99}$
 $\implies H_0$ kann verworfen werden.
- Der Cholesterinwert von Vegetariern ist **signifikant niedriger** als der Normalwert.