

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 10

(32) Sind die folgenden Matrizen Markov-Matrizen? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & x \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & x & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 Punkte)

(33) Geben Sie je eine 3×3 Markov-Matrix mit folgender Eigenschaft an:

- (a) primitiv;
- (b) nicht irreduzibel;
- (c) irreduzibel, aber nicht primitiv.

($\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$ Punkte)

(34) Bestimmen Sie für folgende Markov-Matrix einen Gleichgewichtszustand. Ist er eindeutig?

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

(35) Ein zerstreuter Professor besitzt vier Regenschirme. Er geht jeden Morgen in die Uni, und wenn es regnet, nimmt er einen Schirm mit – falls er gerade einen zu Hause hat. Abends geht er wieder nach Hause und nimmt, falls es regnet und falls er gerade einen Schirm in der Uni hat, einen mit. Wenn es nicht regnet, nimmt er keinen Schirm mit. Die Wahrscheinlichkeit, dass es bei einem Gang des Professors regnet, sei immer gleich p , wobei $0 < p < 1$.

- (a) Beschreiben Sie den Vorgang als Markov-Kette, wobei die Zustände die Zahl der Schirme am jeweiligen Standort des Professors sind. Skizzieren Sie also den zugehörigen Markov-Graphen und bestimmen Sie die zugehörige Markov-Matrix M .
- (b) Welche Bedeutung haben die Einträge der k -ten Potenz M^k von M , wobei $k \in \mathbb{N}$? Welche Bedeutung haben die Einträge von πM^k , wenn π eine beliebige Startverteilung ist?
- (c) Zeigen Sie *ohne* Rechnung, dass es genau eine stationäre Verteilung gibt.

(1+1+ $\frac{1}{2}$ Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 20.06.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.