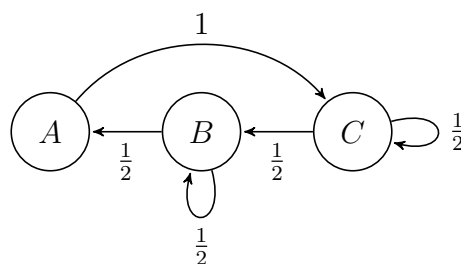


Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 11

(36) Betrachten Sie eine Markov-Kette mit folgendem Übergangsgraphen:

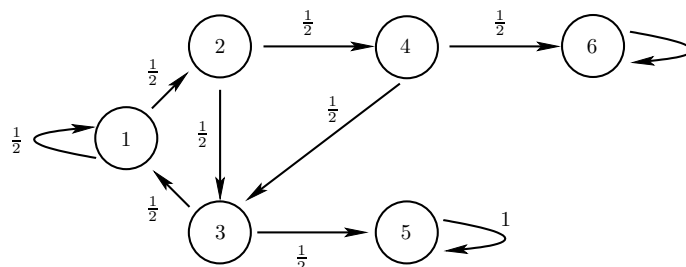


- Stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix auf.
- Zeigen Sie, dass die Markov-Kette irreduzibel ist und berechnen Sie die stationäre Verteilung.

(1+2 Punkte)

(37) Wir betrachten eine Markov-Kette, die durch ihren Übergangsgraphen gegeben wird.

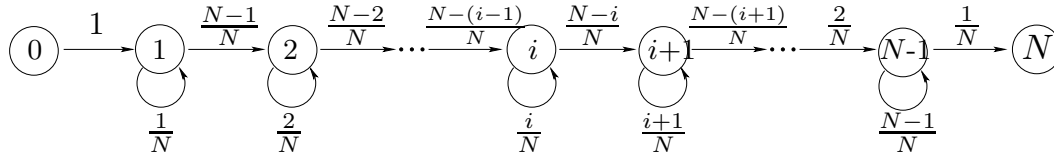
- Bestimmen Sie die Übergangsmatrix für den folgenden Graphen.



- Geben Sie alle Gleichgewichtszustände an und begründen Sie ihre Antwort.

(1+2 Punkte)

- (38) Der österreichische Haselnusswaffelfabrikant *Manner* legt jeder Packung das Bild eines von N österreichischen Fußballspielern bei; jedes der N Bilder ist gleich häufig. Stellen Sie sich nun vor, dass Sie jeden Tag (beginnend mit Tag 1) eine Packung kaufen. Wir betrachten nun eine Markov-Kette, deren Zustand angibt, wie viele *verschiedene* Bilder Sie an Tag n besitzen; an Tag 0 starten Sie mit 0 Bildern. Diese Markov-Kette hat den Übergangsgraphen



- (a) Erklären Sie den Übergangsgraphen und die Übergangswahrscheinlichkeiten. Überlegen Sie sich also: Wenn Sie aktuell i verschiedene Bilder haben ($0 \leq i < N$), mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommen Sie dann am nächsten Tag ein neues (das $(i+1)$ -te) Bild, und warum?
- (b) Nehmen Sie an, Sie sind aktuell im Zustand i ($0 \leq i < N$), haben also i verschiedene Bilder. Es bezeichne nun T_i die (zufällige) Zahl der Tage, bis Sie das nächste neue Bild erhalten. Es gilt stets $T_0 = 1$ (warum?). Bei festem i (mit $1 \leq i < N$) ist T_i *geometrisch* verteilt. Warum und mit welchem Parameter? Geben Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(T_i)$ an.
- (c) Sei nun U_i der Tag, an dem das i -te neue Bild auftaucht ($1 \leq i \leq N$). Drücken Sie U_i als Funktion der T_i aus und nutzen Sie dies, um $\mathbb{E}(U_i)$ anzugeben (für $1 \leq i \leq N$). Geben Sie insbesondere $\mathbb{E}(U_N)$ an und berechnen Sie $\mathbb{E}(U_N)$ explizit für $N = 8$.

(1+2+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 27.06.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.