

---

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

## Übungsblatt 13

- (42) Für eine Zufallsgröße  $X$  und eine Zufallsgröße  $Y$  (z.B. in Experiment und Kontrolle) sollen unabhängige Stichproben von jeweils der Größe  $n$  genommen werden. Die Standardabweichung wird in beiden Fällen als  $\sigma = 10$  angenommen.

Wie groß muss  $n$  sein, damit das 95 % Konfidenzintervall für  $\mu_X - \mu_Y$  die Breite 2 hat? Sie dürfen die Normalapproximation verwenden, da sich  $n$  als ziemlich groß herausstellen wird.

(2 Punkte)

- (43) In einer Anlage zur Produktion von Bluthochdruckmedikamenten werden Tabletten mit dem Wirkstoff Benazepril hergestellt. Jede Tablette hat idealerweise ein Gewicht von höchstens 25 Milligramm ( $mg$ ). Durch natürlichen Verschleiß der eingesetzten Produktionsmaschinen verändert sich der Erwartungswert des Gewichts einer einzelnen Tablette. Unabhängig vom Verschleiß gibt es eine natürliche Schwankung für das Gewicht der Tabletten. Man nimmt an, dass das tatsächliche Gewicht einer Tablette aus einer der Produktionsmaschinen normalverteilt ist mit Erwartungswert  $\mu$  und bekannter Varianz  $\sigma^2 = 9$  (der Maschinenhersteller liefert diesen Wert). Nun soll überprüft werden, ob die Maschine neu kalibriert werden muss. Dazu werden zufällig 49 Tabletten ausgewählt. Dabei ergibt sich ein Durchschnittsgewicht von  $\bar{x} = 26 mg$ .

- (a) Testen Sie zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  die Nullhypothese  $H_0 : \mu \leq 25$  gegen die Alternative  $H_A : \mu > 25$ . Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.
- (b) Wie ist der Fehler 1. Art definiert? Was sagt er hier aus?
- (c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art unter der Annahme, dass  $\mu = 27 mg$  der *wahre* Erwartungswert des Tablettengewichts ist.

**Hinweis:** Unter der Annahme in (c) ist die ZV  $\sqrt{n} \left( \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \right)$  *nicht* standardnormalverteilt. Man braucht noch eine zusätzliche Transformation, die den wahren Erwartungswert  $\mu$  berücksichtigt.

- (d) Bestimmen Sie das symmetrische Konfidenzintervall zum Niveau 0.95 für das Tablettengewicht, das heißt finden Sie  $C_1, C_2$  (in Abhängigkeit von  $\bar{X}$ ) so dass

$$\mathbb{P}(C_1 \leq \mu \leq C_2) = 0.95.$$

**(2+1+2+1 Punkte)**

- (44) In einer Untersuchung wurde die Ährenlänge  $X$  einer Roggensorte gemessen. Bei einer Stichprobe der Größe  $n = 10$  erhielt man die folgenden Werte in  $cm$ :

6.0 9.0 6.8 8.2 9.6 7.9 7.3 6.7 8.6 7.1

- (a) Ermitteln Sie den Mittelwert und die empirische Varianz der Länge der untersuchten Ähren.
- (b) In der Literatur wird die mittlere Länge einer Ähre dieser Roggensorte mit  $7\text{ cm}$  angegeben. Stellen Sie mit einem geeigneten statistischen Test zum Signifikanzniveau 5% fest, ob die untersuchte Stichprobe von der Literaturangabe abweicht. Stellen Sie das Hypothesenpaar auf, begründen Sie die Wahl des Tests, führen Sie den Test durch und interpretieren Sie das Ergebnis.
- (c) In einer Untersuchung der gleichen Roggensorte, die auf einem anderen Feld wächst, werden 240 Ähren untersucht. Die mittlere Ährenlänge ist  $\bar{x} = 7.42\text{ cm}$ , die empirische Varianz ist 1.5. Stellen Sie mit Hilfe eines geeigneten Tests (wieder zum 5%-Niveau) fest, ob die Ähren dieses Feldes mit der Literaturangabe von  $7\text{ cm}$  übereinstimmen. **(1+2+2 Punkte)**

Abgabe bis Donnerstag, 11.07.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.