Michael Baake
Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2024
Bielefeld, 25.04.2024

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 3

(10) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} x^m$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $|x| < 1$ richtig ist.

(3 Punkte)

Hinweis: Folgende Stichworte sollten hilfreich sein: Geometrische Reihe, gleichmäßige Konvergenz, Ableitung, Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

(11) Es sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest, und $0 < p < 1$. Wir betrachten die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung, die durch

$$P_n = \binom{N+n-1}{n} p^N (1-p)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

definiert ist.

(a) Zeigen Sie, dass hierdurch wirklich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gegeben ist (was muss man dazu prüfen?).

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Verteilung.

(c) Berechnen Sie ihre Varianz und ihre Standardabweichung.

(d) Welches Zufallsexperiment kann durch diese Verteilung beschrieben werden?

(1+1+2+1 Punkte)

Hinweis: Arbeiten Sie zunächst im Skript die Rechenmethode mit dem Ableitungstrick nach und setzen Sie dann die Formel aus Aufgabe (10) ein.

(12) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \,\mathrm{d}x.$$

(3 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie das Quadrat

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2} \,\mathrm{d}y\right)$$

und setzen Sie dann Polarkoordinaten ein. Wiederholen Sie zu diesem Zweck die mehrdimensionale Integration und Substitution aus Mathe II.

(13) Gegeben sind 3 Urnen, mit folgenden Zahlen darin:

$$U = \{2, 3, 4, 5\},\ V = \{4, 5, 6, 7\},\ W = \{1, 2, 5, 8, 10\}$$

(jeweils einmal, auf Kugeln gleicher Größe aufgemalt). Aus jeder Urne wird eine Zahl zufällig gezogen.

(a) Beschreiben Sie den Grund- und Ereignisraum.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis gerade ist, wenn die gezogenen Zahlen

(i) addiert werden

(ii) multipliziert werden.

(1+2 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 02.05.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.