

# Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

## Sommersemester 2024

### Übungsblatt 4

- (14) Sei  $N \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest. Wir betrachten die Funktion  $f_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch die Abbildungsvorschrift  $x \mapsto f_N(x)$  mit

$$f_N(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{N!} x^N e^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

gegeben ist.

- Weisen Sie nach, dass  $f_N$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$  definiert.
- Es bezeichne  $X_N$  eine Zufallsvariable (ZV), die gemäß der Dichte  $f_N$  verteilt ist. Berechnen Sie  $\underline{m}_N = \mathbb{E}(X_N)$ .
- Berechnen Sie die Varianz von  $X_N$ .

(1+1+2 Punkte)

**Hinweis:** Hier ist Aufgabe (3b) von Blatt 1 relevant.

- (15) Wir betrachten die durch  $f(x) = \frac{\alpha}{1+x^2}$  definierte Funktion auf  $\mathbb{R}$ .

- Kann  $\alpha$  so gewählt werden, dass  $f$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}$  ist? Falls ja, skizzieren Sie  $f$  im Vergleich zur Dichte der Standard-Normalverteilung.
- Versuchen Sie einen Ausdruck zum Erwartungswert zu ermitteln. Welches Problem tritt dabei zutage?
- Zeigen Sie, dass  $\sigma = \infty$  gilt. Deuten Sie das Ergebnis.

(2+1+1 Punkte)

(16) Die ZV  $X$  sei auf dem Intervall  $[a, b]$  gleichverteilt (wobei  $b > a > 0$  angenommen sei).

(a) Skizzieren Sie die zugehörige Dichte und ihre Verteilungsfunktion.

(b) Sei  $q \in [0, 1]$  beliebig, aber fest gewählt. Berechnen Sie den Wert  $x_q \in [a, b]$ , für den die Gleichung

$$\mathbb{P}(X \leq x_q) = q$$

erfüllt ist.

(c) Ergänzen Sie Ihre Skizze aus (a) zwecks Erläuterung von  $q$  und  $x_q$ .

**(1+2+1 Punkte)**

(17) Frau Kohlmayer–Unkenstein hat in ihrer Handtasche eine Pillenschachtel, in der sich noch 8 Schmerztabletten (Dosierung: 2 Stück) befinden. Beim Aufräumen ihres Kosmetikschrankes findet sie ein Röhrchen mit 3 Tabletten, die genauso aussehen, und schüttet sie dazu. Sie beachtet allerdings nicht, dass es sich dabei um ein schnell wirkendes Abführmittel (Dosierung: 1 Stück) handelt. Am Abend macht sie sich auf den Weg ins Konzert. Als sie leichte Kopfschmerzen verspürt, beschließt sie zwei Tabletten aus ihrer Schachtel zu schlucken. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Frau Kohlmayer–Unkenstein ihren Kulturabend mit ungetrübter Freude genießen kann?

**(3 Punkte)**

Abgabe bis Freitag, 10.05.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.