Michael Baake
Neil Mañibo

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2024
Bielefeld, 08.05.2024

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 5

(18) Wir betrachten noch einmal das Anfangswertproblem (AWP) aus Aufgabe (7):

$$f'(x) - \alpha x \cdot f(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad f(0) = 1\,,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Konstante sei.

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \exp\left(\frac{\alpha}{2}x^2\right)$ von Aufgabe (7) die *einzige* auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Lösung dieses Problems ist.

Hinweis: Behandeln Sie zunächst den Fall $\alpha = 0$ unter Verwendung des Mittelwertsatzes aus Mathe I. Für $\alpha \neq 0$ betrachten Sie am besten eine beliebige Lösung $\varphi(x)$ des Problems und untersuchen $g(x) := \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right) \cdot \varphi(x)$ unter Einsatz der Einsicht zu $\alpha = 0$.

(4 Punkte)

(19) Sei X eine gemäß $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ verteilte Zufallsvariable, mit $\sigma > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass alle ungeraden Momente, also $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, verschwinden.

(b) Berechnen Sie nun für $\sigma = 1$ alle geraden Momente von X mittels ihrer charakteristischen Funktion.

(c) Wie bekommen Sie die geraden Momente für ein beliebiges $\sigma > 0$?

(1+2+1 Punkte)

(20) Mittels Aufgabe (18) wollen wir nun überprüfen, dass die charakteristische Funktion der Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$, also

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ity}\, \mathrm{e}^{-y^2/2}\, \mathrm{d}\, y\,,$$

tatsächlich die Gleichung $\phi(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$ erfüllt. Da $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ das AWP mit $\alpha = -1$ löst, müssen wir nun für $\phi(t)$ folgende Eigenschaften nachweisen:

(a) Es gilt $\phi(0) = 1$.

(b) Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\phi(t) = -t \cdot \phi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(1+3 Punkte)

Hinweis: Lassen Sie sich nicht davon verwirren, dass die relevante Veränderliche jetzt t ist, und nicht mehr x wie in Aufgabe (18). Für (b) dürfen Sie die Differentiation unter das Integral ziehen (warum?) und benötigen dann einen Trick mit partieller Integration, den wir in ähnlicher Form in der Vorlesung verwendet haben.

(21) Die Zufallsvariable X sei nach $\mathcal{N}(3.5, 4.0)$ verteilt. Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und deuten Sie diese graphisch in einer Skizze von Dichte- und Verteilungsfunktion:

(a) $\mathbb{P}(X \leqslant 4.2)$

(b) $\mathbb{P}(X > 3.5)$

(c) $\mathbb{P}(2.8 \leqslant X \leqslant 4.3)$

(d) $\mathbb{P}(X = 3)$

(4 Punkte)

Hinweis: Für die Lösung benötigen Sie eine Tabelle der Verteilungsfunktion für $\mathcal{N}(0, 1)$, die Sie auf der Webseite bei den Materialien finden. Treten Zwischenwerte auf, müssen Sie linear interpretieren.

Abgabe bis Donnerstag, 16.05.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.