

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 6

- (22) Folgende Personendaten sind erfasst worden: Hämoglobinkonzentration im Blut, höchster erreichter Bildungsabschluss, Blutgruppe, Bundesland des Hauptwohnsitzes, systolischer Blutdruck, Haustierhaltung (ja/nein), jährlicher Bierkonsum (in Litern), tägliche Häufigkeit des Zähneputzens, Datum der letzten Coronaimpfung, Haarfarbe, T-Shirt-Größe.

Geben Sie für jedes Merkmal den Skalentyp an (nominal, ordinal, intervallskaliert). Für welche der Merkmale kann man sinnvoll den Mittelwert bilden?

(2 Punkte)

- (23) Zeigen Sie die Transformationsregel für die empirische Varianz:

Gegeben sei eine Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ mit empirischer Varianz s_x^2 .

Betrachten Sie nun die linear transformierten Werte $y_i := ax_i + b$, $1 \leq i \leq n$.

Rechnen Sie nach, dass für deren empirische Varianz

$$s_y^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad \text{mit } \bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

gilt:

$$s_y^2 = a^2 s_x^2.$$

(2 Punkte)

- (24) Ein Geiger–Müller-Zählrohr zähle pro Sekunde die registrierten radioaktiven Emissionen einer Probe. Die ersten 50 Ergebnisse lauten:

7,4,3,6,4,4,5,3,5,3,5,5,3,2,5,4,3,3,7,6,6,4,3,11,9,
6,7,4,5,4,7,3,2,8,6,7,4,1,9,8,4,8,9,3,9,7,7,9,3,10.

- (a) Berechnen Sie den Mittelwert und die empirische Varianz.

- (b) Zeichnen Sie ein Säulendiagramm, das die Verteilung der Emissionen beschreibt.

(2+1 Punkte)

- (25) Weisen Sie nach, dass die Formel für den empirischen Mittelwert einen erwartungstreuen Schätzer darstellt. Dazu seien $X_1, \dots, X_N$ Zufallsvariablen mit derselben Verteilung, also auch $\mathbb{E}(X_i) = \underline{m}$ für alle $1 \leq i \leq N$. Zeigen Sie nun für $\bar{X} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$, dass $\mathbb{E}(\bar{X}) = \underline{m}$ gilt. Deutung? (2 Punkte)

- (26) Führen Sie das zu Aufgabe (25) analoge Argument für die empirische Varianz aus, berechnen Sie also die Größe

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 \right).$$

Dabei sei σ^2 die Varianz von X_i , für alle $1 \leq i \leq N$.

Hinweise: Es gilt $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j)$ für $i \neq j$, wenn die X_i *unabhängig* sind, was hier zusätzlich angenommen sei.

Berechnen Sie damit zunächst $\mathbb{E}(\bar{X} \cdot X_i)$ und dann $\mathbb{E}(\bar{X}^2)$. Damit kann der obige Erwartungswert ausgerechnet werden, wenn Sie zusätzlich beachten, dass $\mathbb{E}(X_i^2) = \mathbb{E}(X_1^2)$ für alle $1 \leq i \leq N$ gilt, sowie $\sigma^2 = \mathbb{E}(X_1^2) - \underline{m}^2$.

(3 Punkte)

- (27) Die Zeit zwischen der Ankunft von Hummeln auf einer Pflaumenblüte sei exponentialverteilt, mit Parameter $\lambda = 0.3/\text{h}$.

- (a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die Blüte länger als 3 Stunden auf die nächste Hummel wartet?
- (b) Eine Blüte ist 40 Stunden offen, bevor sie verwelkt (gezählt werden nur Sonnenstunden, in denen Hummeln unterwegs sind). Wie wahrscheinlich ist es, dass die Blüte während dieser Zeit gar keinen Besuch bekommt? Was ist die erwartete Zahl von Hummelbesuchen während der gesamten Öffnungszeit der Blüte?

(3 Punkte)

Hinweis: Die Exponentialverteilung mit Parameter λ ist im Skript als Beispiel in Kapitel 1.9 behandelt. Sie benötigen auch die zugehörige Verteilungsfunktion.

Abgabe bis Donnerstag, 23.05.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.