

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

Übungsblatt 9

(37) Die ZVn X und Y seien exponentialverteilt, mit Parametern $\lambda = \mu = 1$.

- (a) Geben Sie die gemeinsame Dichte von X und Y an.
- (b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y \geq X)$.
- (c) Wie lässt sich das Ergebnis von (b) auch ohne Rechnung ableiten?

(1+1+1 Punkte)

(38) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariable, die alle derselben Verteilung folgen, mit Erwartungswert $\underline{m}$ und Varianz V . Wir betrachten nun die neue Zufallsvariable $Z := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

- (a) Berechnen Sie $\mathbb{E}(Z)$.
- (b) Nutzen Sie die Unabhängigkeit von $X_1, \dots, X_n$, um die Varianz von Z zu berechnen.
- (c) Vergleichen Sie das Ergebnis von (b) mit der Varianz von $\frac{1}{n}X_i$ (siehe Seite 21 des Skripts). Was fällt auf?

(1+2+1 Punkte)

(39) Gegeben sind $N+1$ von 0 bis N durchnummerierte Urnen. Urne k enthält 2^{N-k} rote und $2^N - 2^{N-k}$ blaue Kugeln. Es wird eine der $N+1$ Urnen zufällig gewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen.

- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel rot ist.
- (b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel zu Urne k gehört, unter der Bedingung, dass die Kugel rot ist.

(2+2 Punkte)

(40) Betrachten Sie die Gleichverteilung mit Dichtefunktion $f(x)$ von Aufgabe (31)b. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz für die durch $f * f$ definierte Verteilung

(a) Mittels der Definition von $\mathbb{E}(X)$ bzw. $V(X)$.

(b) Mittels ihrer charakteristischen Funktion Φ_{f*f} .

Hinweis: Für Teil (b) kann man den Faltungssatz verwenden ($\Phi_{f*f} = \Phi_f \cdot \Phi_f$), um die charakteristische Funktion von $f * f$ zu berechnen. Dazu braucht man die zugehörige Taylor-Reihe von Φ_{f*f} .

(2+3 Punkte)

Abgabe bis Donnerstag, 13.06.24, 12 Uhr, im Postfach des Tutors.