2. Ergänzungsstunde

- Hypergeometrisch:

$$\mathbb{P}(k\text{-mal rot bei } n \text{ Ziehungen}) = \frac{\binom{K}{k}\binom{L}{l}}{\binom{N}{n}} = p_k$$

$$K+L=N, \quad k+l=n, \quad 0 \le n \le N$$

- Normierung: (N, K, n sind fest)

$$\sum_{k=0}^{K} p_k = \binom{N}{n}^{-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{K} \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}_{} = 1 \ /\!/$$

$$= \sum_{k=0}^{K} \binom{K}{k}\binom{L}{n-k} \qquad (K+L=N)$$

$$\overset{(!)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{K}{k}\binom{L}{n-k} \overset{?}{=} \binom{N}{n}$$

$\hookrightarrow$ denn: $\binom{K}{k} = 0$ für $k > K$

und: $\binom{L}{n-k} = 0$ für $n-k > L$

Zur Erinnerung:

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-m+1)}{m!}$$

also $\binom{M}{m} = 0$ für $m < 0$ und $m > M$, $M \in \mathbb{N}_0$

- Lemma: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1} + \ldots + \binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Beweis: Wir verwenden

$$\underbrace{(1+x)^{\alpha} \cdot (1+x)^{\beta}}_{} = (1+x)^{\alpha+\beta}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} x^m \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta}{l} x^l = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+\beta}{n} x^n \qquad (|x|<1)$$

Nun betrachten wir die linke Seite:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m} x^m \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\beta}{l} x^l$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m}\binom{\beta}{l} x^{m+l}$$

$$\overset{(!)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}}_{=\binom{\alpha+\beta}{n}}$$

per Vergleich der koeffizienten!

□

- Berechnen wir den <u>Erwartungswert</u>:

$$\underline{m} = \binom{N}{n}^{-1} \sum_{k=0}^{K} \underbrace{k\binom{K}{k}}_{=K\cdot\binom{K-1}{k-1}}\binom{N-K}{n-k}$$

$$\overset{l=k-1}{=} K\cdot\binom{N}{n}^{-1} \underbrace{\sum_{l=0}^{K-1}}_{\text{wir können bis } n-1 \text{ summieren, ohne die Summe zu ändern!}} \binom{K-1}{l}\binom{N-K}{n-1-l}$$

$$= K\binom{N}{n}^{-1} \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}\binom{K-1}{l}\binom{N-K}{n-1-l}}_{=\binom{N-1}{n-1}}$$

nach Lemma

$$= \frac{K\binom{N-1}{n-1}}{\underbrace{\binom{N}{n}}_{=\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}}} = \boxed{n\cdot\frac{K}{N} = n\cdot p = \underline{m}}$$

- <u>Vergleich:</u> $B(n,p) \rightsquigarrow \underline{m} = n\cdot p$

hier: $p = \frac{K}{N}$: gleich beim 1. Ziehen, aber dann <u>ohne</u> Zurücklegen

<u>Frage:</u> Wieso gilt $\underline{m} = n\cdot p$ <u>exakt gleich</u> für beide Verteilungen?

$$\mathbb{P}(\text{rot bei 1. Ziehung}) = p_1 = \frac{\binom{K}{1}\binom{L}{0}}{\binom{N}{1}} = \underline{\frac{K}{N} = p}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{rot bei 2. Ziehung}) &= \mathbb{P}(\text{rot bei 1. Ziehung und bei 2. Ziehung}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{weiß bei 1. Ziehung und rot bei 2. Ziehung}) \\
&= p\cdot\binom{K-1}{1}\cdot\binom{L}{0}\cdot\binom{N-1}{1}^{-1} + (1-p)\cdot\binom{K}{1}\binom{L-1}{0}\binom{N-1}{1}^{-1} \\
&= p\cdot\frac{K-1}{N-1} + (1-p)\frac{K}{N-1} = \frac{1}{N(N-1)}\big(K(K-1) + (N-K)K\big) \\
&= \frac{(N-1)K}{N(N-1)} = \frac{K}{N} = p
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\text{rot bei Z. }(m+1)) = \sum_{k=0}^{m}{}^{1\le m<n} \overbrace{\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{m-k}}{\binom{N}{m}}}^{\mathbb{P}(k\text{-mal rot nach } m \text{ Z.})} \cdot \overbrace{\frac{K-k}{N-m}}^{\mathbb{P}(\text{rot bei einer Z.})}$$

$$= \binom{N}{m}^{-1}\frac{1}{N-m}\Bigg(K\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\binom{K}{k}\binom{N-K}{m-k}}_{=\binom{N}{m}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{m} k\binom{K}{k}\binom{N-K}{m-k}}_{=K\underbrace{\binom{N-1}{m-1}}_{=\frac{m}{N}\binom{N}{m}}}\Bigg)$$

$$= \frac{K}{N-m}\left(1 - \frac{m}{N}\right) = \underline{\frac{K}{N} = p}$$

$\rightsquigarrow$ also in <u>jedem</u> Schritt $p = \frac{K}{N} \Rightarrow \boxed{\underline{m} = n\cdot p}$

- 2. Moment:

$$\binom{N}{n}^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{K} k^2 \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} \overset{(!)}{=} \binom{N}{n}^{-1} K \sum_{k=1}^{K} \overset{=1+(k-1)}{k} \binom{K-1}{k-1}\binom{N-K}{n-k} = \text{I} + \text{II}$$

mit: $\text{I} = \binom{N}{n}^{-1} K \sum_{k=1}^{K} \binom{K-1}{k-1}\binom{N-K}{n-k} = \ldots = n \cdot \frac{K}{N}$ (wie oben)

und: $\text{II} \overset{(!)}{=} \binom{N}{n}^{-1} K \sum_{k=2}^{K} \underbrace{(k-1)\binom{K-1}{k-1}}_{=(K-1)\binom{K-2}{k-2}} \binom{N-K}{n-k}$

$$\binom{N}{n} = \frac{N(N-1)}{n(n-1)}\binom{N-2}{n-2}$$

$$\overset{(!)}{=} \binom{N}{n}^{-1} K(K-1) \underbrace{\sum_{l=0}^{n-2} \binom{K-2}{l}\binom{N-K}{n-2-l}}_{=\binom{N-2}{n-2}} = n(n-1)\frac{K(K-1)}{N(N-1)}$$

$\Rightarrow$ 2. Moment $= \frac{nK}{N(N-1)}\left((n-1)(K-1) + (N-1)\right) = ⊛$

- Varianz:

$$V = ⊛ - m^2 = ⊛ - \frac{n^2K^2}{N^2}$$

$$= \frac{nK}{N^2(N-1)}\left((n-1)(K-1)N + (N-1)N - nK(N-1)\right)$$

$$= \frac{nK}{N^2(N-1)} \underbrace{\left(N^2 - KN - nN + nK\right)}_{=(N-K)(N-n)}$$

$$= \frac{nKL(N-n)}{N^2(N-1)}$$

↷ $\sigma = \sqrt{V}$ Standardabw.