

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Sommersemester 2024

Ergänzungsstunde: Testen von Hypothesen

- (1) Eine der heiß diskutierten Zahlen war der Anteil der Bevölkerung, der sich nicht gegen Corona impfen lassen will. Wissenschaftler A will herausgefunden haben, dass dieser Anteil 31 % beträgt. Wissenschaftler B bezweifelt das — er vermutet, der Anteil sei geringer.

Bezeichne p den Anteil der Impfverweigerer in der Bevölkerung, den wir zunächst als unbekannt annehmen. Um p zu quantifizieren, wird eine Stichprobe von $n = 1000$ Personen befragt. Wissenschaftler B möchte dann seine Vermutung anhand eines statistischen Tests erhärten. Nehmen Sie an, dass die befragten Personen unabhängig sind und wahrheitsgemäß antworten.

- (a) Geben Sie die Nullhypothese und die Alternativhypothese an.
 - (b) Welcher Verteilung folgt die Anzahl X der Impfverweigerer in der Stichprobe in Abhängigkeit von p ? Betrachten sie nun den *Anteil* X/n der befragten Personen, die sich nicht impfen lassen wollen. Welcher Verteilung folgt X/n in der Normalapproximation? Für welche Werte von p ist diese Approximation erlaubt? (Vergessen Sie nicht, die Parameter der approximativen Verteilung anzugeben.)
 - (c) Wissenschaftler B will mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1 % zwischen den beiden Hypothesen unter (a) entscheiden. Welchen Test muss er machen? Wie viele Personen in der Stichprobe dürfen höchstens Impfverweigerer sein, damit er die Nullhypothese verwirft?
 - (d) Wenn tatsächlich $p = 0.25$ ist, wie groß ist dann bei dem Test unter (c) der Fehler 2. Art?
- (2) Seien X, Y normalverteilte ZVn mit gleicher (aber unbekannter) Varianz. Aus einer Stichprobe mit Umfang 12 für X ergeben sich der empirische Mittelwert 20.5 und die empirische Varianz 1.6. Für Y liefert eine Stichprobe mit Umfang 15 die Werte $\bar{y} = 22.8$ und $s_y^2 = 1.0$. Führen Sie den geeigneten Test durch, um zu testen (zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$), ob $\mu_X = \mathbb{E}(X)$ signifikant kleiner ist als $\mu_Y = \mathbb{E}(Y)$.