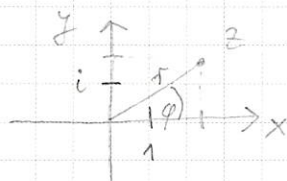


3. Ergänzungsstunde: Potenzreihen

- kleine Wdh.: Komplexe Zahlen:

$\mathbb{C}$

$$z = x + iy$$



$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$z \cdot z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

$$\bar{z} = x - iy \quad (\text{Spiegelung an der } x\text{-Achse})$$

$$|z| = \sqrt{|z|^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |z^n| = |z|^n$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad r = |z|: \quad \text{Polardarstellung}$$

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z: \quad \forall \varepsilon > 0: \exists n_0: \forall n \geq n_0: |z_n - z| < \varepsilon$$

$\rightarrow$ Konvergenz von Vektoren in $\mathbb{R}^2$

- $\mathbb{C}$ ist ein Körper, algebraisch abgeschlossen

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ (mit Vielfachheiten gezählt).

(Ex)

$$z^2 + 1 = 0$$

• keine Lösung in $\mathbb{R}$

• $z = \pm i$ in $\mathbb{C}$

(Ex)

$$z^4 - 1 = 0$$

"4. Einheitswurzeln"

$$= (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z^2 + 1)(z + 1)(z - 1)$$

$\rightarrow$ Nullstellen $\{1, i, -1, -i\}$

Geometrische Reihe (in $\mathbb{C}$)

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n$$

$$z \cdot S_n = z + z^2 + \dots + z^{n-1} + z^n + z^{n+1}$$

$$(1-z) \cdot S_n = 1 - z^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Was passiert bei $z=1$?

linke Seite: $1 + 1 + \dots + 1 = (n+1) = \sum_{k=0}^n 1$

rechte Seite: l'Hospital!

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \stackrel{(!)}{=} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(n+1)z^n}{-1} = n+1 \quad \checkmark$$

Was passiert bei $n \rightarrow \infty$?

$$S_n(z) = \frac{1}{1-z} (1 - z^{n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{|z| < 1} \frac{1}{1-z}$$

denn: $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$ für $|z| < 1$ ($\forall$)

Satz: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (\text{geom. Reihe})$$

Dies ist zugleich die Taylor-Reihe von $f(z) = \frac{1}{1-z}$ um 0.

• Taylor-Reihe:

$$f(z) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{\text{muss existieren}} \underbrace{(z-z_0)^n}_{\text{muss konvergieren}}$$

(Ex) $f(z) = e^z$; $f'(z) = f(z)$ (auch in $\mathbb{C}$)

$z_0 = 0$
 $\rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, für alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}; \quad f'(z) = (1-z)^{-2}; \quad f''(z) = 2(1-z)^{-3};$$
$$\dots; \quad f^{(n)}(z) = n! (1-z)^{-n-1}$$

$z_0 = 0$
 $\rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, für $|z| < 1$

$$f(z) = \log(1-z); \quad f'(z) = \frac{-1}{1-z}; \quad f^{(n)}(z) = \frac{-(n-1)!}{(1-z)^n}$$

$z_0 = 0$
 $\rightarrow f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, für $|z| < 1$

$$\left. \begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} \\ \cos(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} \end{aligned} \right\} \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

Übung:

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

 (Euler)

mehr Beispiele: Formelsammlung

• Konvergenzradius:

Betrachte $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = P(z)$

Setze

$$\rho = 1 / \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

(ist immer wohl definiert)

Satz (Hadamard):

$|z| < \rho \Rightarrow P(z)$ konvergiert absolut

$|z| > \rho \Rightarrow P(z)$ divergiert

$|z| = \rho$: keine allg. Aussage möglich

(Ex) $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \rho = 1$ für $\frac{1}{1-z}$, $\log(1-z)$, ...

$\sqrt[n]{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \rho = \infty$ für $\exp$, $\sin$, $\cos$, ...

Vereinfachung:

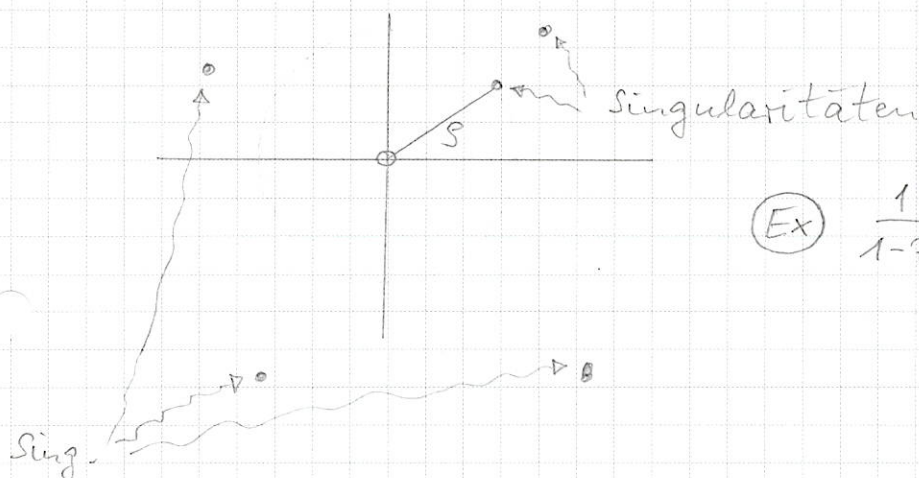
Wenn $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert, so ist

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$; gilt auch für $\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

(Ex) e^z : $a_n = 1/n!$ $\Rightarrow a_n/a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{n!} = (n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$

Noch einfacher: "Peng-Prinzip":

ρ ist Entf. zur nächsten Singularität



(Ex) $\frac{1}{1-z}$: $z=1$ ist Pol
 $\Rightarrow \rho = 1$