

- Charakteristische Funktion der Poisson-Verteilung

$$P_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (\lambda > 0, n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^{it})^n}{n!} = \underline{\underline{e^{\lambda(e^{it} - 1)}}} \\ &= e^{\lambda \cdot e^{it}} \end{aligned}$$

- Normierung: $\phi_\lambda(0) = e^0 = \underline{\underline{1}}$ ✓

$$\boxed{\mathbb{E}(X^n) = (-i)^n \phi_\lambda^{(n)}(0)}$$

$$\phi_\lambda'(t) = \phi_\lambda(t) \cdot (i\lambda) e^{it}$$

$$\underline{m} = -i \phi_\lambda'(0) = \underline{\underline{\lambda}} \quad \checkmark$$

$$\phi_\lambda''(t) = \phi_\lambda(t) \left((i\lambda e^{it})^2 - \lambda e^{it} \right)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = -\phi_\lambda''(0) = \lambda^2 + \lambda$$

$$V = -\phi_\lambda''(0) + (\phi_\lambda'(0))^2 = \underline{\underline{\lambda}} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(t) &= 1 + i\lambda t - \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda)t^2 \\ &\quad - \frac{i}{6}(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)t^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}(\lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda)t^4 + o(t^5) \end{aligned}$$

- Fibonacci - Zahlen

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

Frage: Wie wächst f_n mit n ?

$$a_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{Ann.: existiert})$$

$$a \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a \neq 0} 1 + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad (\text{da } a > 1 \quad \forall)$$

[Bem./Übung: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert,
Bew. per Cauchy-Kriterium]

- $$\begin{aligned}
 F(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n \quad (\text{da } f_0 = 0) \\
 &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) x^n \quad (\text{Rekursion!}) \\
 &= x + x \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m}_{= F(x)} + x^2 \cdot \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} f_l x^l}_{= F(x)} \\
 &= x + (x + x^2) \cdot F(x)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}} = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots$$

- Konvergenzradius der Reihe?

Nullstellen des Nenners:

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) = \begin{cases} 1/a \approx 0.618 \\ -a \approx -1.618 \end{cases}$$

$\xRightarrow{\text{Reng-Prinzip}}$
 $\boxed{\rho_F = 1/a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}}}$
 (vgl. Stunde 3)

$$\Rightarrow f_{n+1} \approx \underbrace{a}_{1/\rho_F} \cdot f_n \quad \text{für große } n$$

$$\Rightarrow f_n \approx \gamma \cdot a^n \quad \text{für große } n$$

- Partialbruchzerlegung:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\alpha}{1-r_+x} + \frac{\beta}{1-r_-x} \quad \begin{cases} r_+ = a, \quad r_- = -1/a \\ r_+ + r_- = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha(1-r_-x) + \beta(1-r_+x) \stackrel{!}{=} x$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = 0, \quad \alpha r_- + \beta r_+ = \alpha(1-a) + \beta a = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = 1/\sqrt{5}, \quad \beta = -1/\sqrt{5} \quad (2a-1=\sqrt{5})$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \dots = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-ax} - \frac{1}{1-\frac{-x}{a}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a^m x^m - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{a} \right)^n x^n \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(a^m - \left(\frac{-1}{a} \right)^m \right) x^m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_m = \frac{a^m - (-1/a)^m}{\sqrt{5}}} \quad (\text{Koeffizientenvergleich!})$$

• $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1$ (prüfen!)

$f_m \sim \frac{a^m}{\sqrt{5}}$ für m groß (!)

$\Rightarrow \gamma = 1/\sqrt{5}$

• Matrizen:

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \dots = M^n \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt:

$$M^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{Bew.: Induktion})$$

$$M v_{\pm} = a_{\pm} v_{\pm}, \quad a_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Übung: Berechne $v_{\pm}$ (Eigenvektoren)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha v_+ + \beta v_-$$

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha a_+^n \cdot v_+ + \beta a_-^n v_-$$

Berechne daraus f_n

Vergleich mit oben! ▽

"Bonus": Definiere f_n für $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Prüfe alle Formeln! ▽