

Exponential- bzw. Wartezeitverteilung

- Situation: Ein zufälliges Ereignis tritt ein mit (fester) Rate  $\lambda > 0$  [ $\frac{1}{s}$ ]

ZV:  $T$  (Wartezeit);  $\Omega = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\leadsto p(t) := \mathbb{P}(T > t)$ : Wahrscheinlichkeit, dass bis  $t$  nichts passiert ist

$$\leadsto \underline{p(0) = 1}$$

- Warten auf 1. Ereignis:

$$\Delta p(t) = -\lambda \cdot p(t) \cdot \Delta t \quad (\text{für kleines } \Delta t)$$

$$\leadsto \frac{\Delta p(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p(t)$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad \leadsto \boxed{\dot{p}(t) = -\lambda \cdot p(t), \quad p(0) = 1}$$

$$\Rightarrow \underline{p(t) = e^{-\lambda t}} \quad (\text{eindeutig!})$$

- Verteilungsfunktion: (von  $T$ )

$$F(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \mathbb{P}(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Dichte:}} \quad f_{\lambda}(t) = \dot{F}(t) = \underline{\lambda e^{-\lambda t}} \quad (t \geq 0)$$

- Def.: 
$$f_{\lambda}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist die Dichtefunktion der Wartezeitverteilung zur (festen) Rate  $\lambda > 0$

- Normierung:  $f_{\lambda}(t) \geq 0$  ✓

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\lambda}(t) dt = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} \stackrel{\lambda > 0}{=} \underline{\underline{1}} \quad \checkmark$$

- Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda t \cdot e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{\infty} \tau \cdot e^{-\tau} \frac{d\tau}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left( \underbrace{-\tau e^{-\tau}}_{=0} \Big|_0^{\infty} + \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau}_{=1} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}} = \underline{\underline{m}} \end{aligned}$$

- 2. Moment:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda t^2 \cdot e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{\infty} \tau^2 e^{-\tau} d\tau \cdot \lambda^{-2} \\ &= \lambda^{-2} \left( \underbrace{-\tau^2 e^{-\tau}}_{=0} \Big|_0^{\infty} + 2 \underbrace{\int_0^{\infty} \tau e^{-\tau} d\tau}_{=1 \text{ (s.o.)}} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{\lambda^2}}} \end{aligned}$$

- Varianz / Standardabweichung:

$$V = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda^2}}}, \quad \sigma = \underline{\underline{\frac{1}{\lambda}}}$$

Also:

$$\boxed{\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{\lambda} \\ V &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}}$$



- Charakteristische Funktion:

$$\begin{aligned}
 \phi_\lambda(s) &= E(e^{iTs}) = \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t + its} dt \\
 &\quad \left( \begin{array}{l} \uparrow \\ t \text{ ist schon} \\ \text{in Benutzung!} \end{array} \right) \\
 &= \frac{-\lambda}{\lambda - is} e^{-t(\lambda - is)} \Big|_0^\infty \\
 &= \underbrace{\left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} e^{its} \right)}_{\substack{\in \mathbb{S}^1 \\ = 0 \text{ (}\forall\text{)}}} - 1
 \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\phi_\lambda(s) = \frac{1}{1 - is/\lambda}} \quad (\text{vgl. Vorlesung})$$

- Momente:

$$\phi_\lambda(0) = 1 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 \phi_\lambda(s) &= \frac{1}{1-x} \Big|_{x=is/\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=is/\lambda} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{\lambda^n} s^n
 \end{aligned}$$

$$E(e^{iTs}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} E(T^n) s^n$$

$$\Rightarrow \boxed{E(T^n) = \frac{n!}{\lambda^n}} \quad (\text{Vergleich mit oben!})$$

- Verallgemeinerung durch Verschieben der 0 an eine beliebige Stelle (vgl. Tabelle für das Rechnen mit ZVen)