

Wdh. Differentialgleichungen

- Eine DGL ist eine Gleichung, die $x, y, y', y'', \dots$ als "Unbekannte" enthält; dabei:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) : \text{ n-ter Ordn., explizit}$$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 : \text{ dto., implizit}$$

(Ex) $y'' + \alpha y' + y + g(x) = 0$
(linear, 2. Ordn., inhomogen)

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^2 + x^2 = 0$$

(nichtlin., 1. Ordn.)

- Die "einfachste" DGL:

$$\boxed{y' = 0} \quad \text{auf } I = [a, b]$$

$$x \in I \Rightarrow \underbrace{\int_a^x y'(\xi) d\xi}_{(*)} = \int_a^x 0 d\xi = 0$$

$$= y(x) - y(a) \quad (\text{Ann.: } y' \text{ ist integrierbar } \checkmark)$$

$$\Rightarrow y(x) \equiv y(a) \text{ auf } I, \\ \text{also } \underline{\text{konstant}}$$

- Die "Mutter" aller DGLen:

$$\boxed{y' = \alpha \cdot y} \quad \text{auf } \mathbb{R}, \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

Ist noch der Wert von y an einer Stelle vorgegeben, z.B. $y(0) = y_0$, spricht man von einem Anfangswertproblem (AWP).

- Satz: Die durch $x \mapsto y(x) = y_0 e^{\alpha x}$ definierte Funktion (auf $\mathbb{R}$) ist die einzigste auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, die das AWP $y' = \alpha y$ mit $y(0) = y_0$ erfüllt.

Bew.: $y_0 e^{\alpha x}$ erfüllt das AWP, es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen.

Sei g irgendeine Lösung. Setze $h(x) = g(x) e^{-\alpha x}$. Dann ist h auf $\mathbb{R}$ diff. bar (Produktregel), mit

$$h'(x) = \underbrace{g'(x) e^{-\alpha x}}_{= \alpha g(x)} - \alpha g(x) e^{-\alpha x} = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow h(x) = \text{const. auf } \mathbb{R} \text{ (nach } \circledast \text{)}$

Nun ist $h(0) = g(0) = y_0$, also $g(x) = y_0 e^{\alpha x}$ $\square$

- Wichtige Einsicht:

Man kann die Fktn. e^x als die (eindeutige!) Lsg. des AWP $\boxed{y' = y, y(0) = 1}$ definieren!

$\textcircled{\text{Ex}} \quad y' = -x \cdot y, \quad y(0) = 1$

$\Rightarrow$ einzigste Lsg. ist $y = e^{-x^2/2}$
(Bew. analog - Übung)

$$y' = y; \quad y(0) = 1 = y_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^x y'(\xi) d\xi}_{= y(x) - y(0)} = \int_0^x y(\xi) d\xi$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = 1 + \int_0^x y(\xi) d\xi} \quad \begin{array}{l} \text{Volterra} \\ \text{Integralgl.} \end{array}$$

(wird von $y(x) = e^x$ gelöst!)

Picard - Iteration

$$y_0 \equiv 1; \quad y_{n+1}(x) := 1 + \int_0^x y_n(\xi) d\xi \quad (n \geq 0)$$

Damit bekommen wir:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x d\xi = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + \xi) d\xi = 1 + \xi + \frac{1}{2} \xi^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + \xi + \frac{1}{2} \xi^2) d\xi = 1 + \xi + \frac{1}{2} \xi^2 + \frac{1}{6} \xi^3$$

$\vdots$

Vermutung: $y_n(x) = \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}$

Induktion:

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= 1 + \int_0^x \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \xi^m d\xi \\ &= 1 + \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left. \frac{\xi^{m+1}}{m+1} \right|_0^x \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} \frac{x^m}{m!} \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underline{\underline{e^x}} \end{aligned}$$

↪ Potenzreihe als Konsequenz!

• Folgerung:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Bew.: Wir nehmen die Ex. des Limes an (bewiesen in Ana I). Setze $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, also ex. $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, mit $f(0) = 1$.

$$f'_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} = \underbrace{f_n(x)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)}_{= f'(x)} = f(x) \quad \left. \vphantom{\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)} \right\} \Rightarrow f(x) = \underline{e^x}$$

• Erweiterung auf Matrizen:

$$e^{tQ} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tQ)^m}{m!}, \quad e^0 = \mathbb{1}$$

$$\frac{d}{dt} e^{tQ} = Q \cdot e^{tQ} \quad \rightarrow \text{kommt bei Markovketten in kont. Zeit}$$

Deutung:

Eindeutige Lsg. von

$$\dot{M} = Q M, \quad M(0) = \mathbb{1}$$

Auch für Matrizen gilt:

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} + \frac{1}{n} \cdot A \right)^n$$

• Schwingungen:

$$\boxed{y'' + \omega^2 \cdot y = 0}$$

(ohne Dämpfung)

$$\left. \begin{aligned} y_1(x) &= \cos(\omega x) \\ y_2(x) &= \sin(\omega x) \end{aligned} \right\} \text{ lösen die DGL}$$

$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$ ist auch Lsg.

AWP: $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0 \quad \leadsto$ legt α, β fest

• Satz von Picard-Lindelöf:

Erfüllt die DGL bestimmte Stetigkeitsbedingungen, hat das zugehörige AWP eine eindeutige Lösung.

Bew.:

- Volterra-Gleichung als Iteration studieren
- geeignete Norm wählen, mit Kontraktionseigenschaft
- Banach'schen Fixpunktsatz anwenden!