

$$\bullet \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

(Konvergenz angenommen)

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_m b_n x^{m+n}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^N a_k b_{N-k} x^N$$

$$= (a * b)(N)$$

• Diskrete Faltung:

$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

$$\begin{cases} a(n) = a_n \\ b(n) = b_n \end{cases}$$

$$\hookrightarrow a * b = \left(\underbrace{a * b(n)}_{:= \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m}} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Dabei gilt:

$$\textcircled{\text{I}} \quad \begin{cases} a * b = b * a & (\text{kommutativ}) \\ (a * b) * c = a * (b * c) & (\text{assoziativ}) \\ (a + b) * c = a * c + b * c & (\text{distributiv}) \end{cases}$$

$$\text{dabei ist: } (a+b)(n) = a(n) + b(n)$$

(Bew.: nachrechnen / Übung)

$$\bullet \quad \delta = (\delta_{0,n})_{n \in \mathbb{N}_0}: \quad \delta = (1, 0, 0, \dots)$$

$$(\delta * a)(n) = \sum_{m=0}^n \delta_{0,m} a_{n-m} = a(n) = a_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta * a = a} \quad \delta \text{ ist } \underline{\text{Einheit}}$$

- Sei $\mathcal{F}$ die Menge der Folgen
 $\rightarrow (\mathcal{F}, +, *)$ ist eine Algebra mit Einheit

$$\phi: \mathcal{F} \longrightarrow \{\text{formale Potenzreihen}\} =: \mathcal{P}$$

$$a \longmapsto \phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

[gewöhnliche
erzeugende
Funktion]

Lemma:

Die Abb. ϕ erfüllt:

$$(1) \quad \phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$$

$$(2) \quad \phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \quad (\text{Faltungssatz})$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi: (\mathcal{F}, +, *) \longrightarrow (\mathcal{P}, +, \cdot)}$$

- (Ex) $a = (1, 1, 1, \dots)$, $\phi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$

$$(a * a)(n) = \sum_{m=0}^n 1 \cdot 1 = (n+1)$$

$$\begin{aligned} (\phi(a))^2 &= \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^m = \phi(a * a) \end{aligned}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n n! \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{y^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y}$$

$\rightarrow$ verwandte Struktur!

$$\bullet \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = f(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a_m b_{n-m}}_{=: (a \otimes b)(n)} \frac{x^n}{n!}$$

↪ auch eine Faltung!

① gilt auch für $\otimes$

δ ist wieder Einheit

$$\bullet \quad \psi: (\mathcal{F}, +, \otimes) \rightarrow (\mathcal{E}, +, \cdot)$$

$$a \mapsto \psi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

$$\textcircled{\text{Ex}} \quad a = (1, 1, 1, \dots), \quad \psi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\psi(a \otimes a) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^n \binom{n}{m}}_{= 2^n} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x} = (\psi(a))^2$$

exponentielle
erzeugende
Funktion

Diese Strukturen sind allgegenwärtig!

- W.-Theorie: charakteristische Funktion
- Fourier-Analyse: "Faltungssatz"
- DFT & FFT: Datenglättung

- Kontinuierliches Gegenstück:

$f(x), g(x)$: beide integrierbar: $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\leadsto (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy$$

Schon bekannt: $f * g = g * f$

Faltungssatz:
s. Vorlesung

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(f + g) * h = f * h + g * h$$

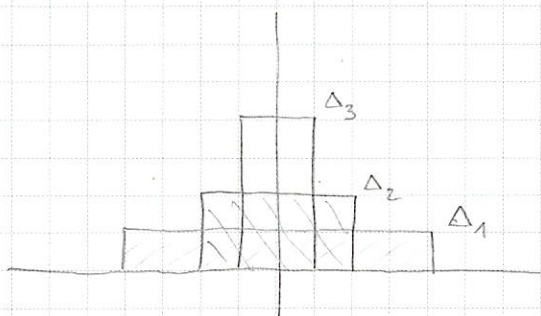
- $(L^1(\mathbb{R}), +, *)$ ist eine (Banach)-Algebra

Frage: Gibt es ein Analogon zu δ ?

Es müsste gelten: $\delta * f = f$, also

$$(\delta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta(y) \cdot f(x-y) dy \stackrel{(!)}{=} f(x)$$

Das geht nur approximativ:



$$\int_{\mathbb{R}} \Delta_i(x) dx = 1$$

+ Konzentration bei 0

Oder: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow{\sigma \searrow 0} \text{"}\delta(x)\text{"}$

$$\Rightarrow \lim_{\sigma \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} f(x-y) dy = f(x)$$

↑ ↑
nicht vertauschbar!