

• Situation (einfachster Fall):

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei Familie von unabhängigen ZVen mit gleicher Verteilung, alle mit $\mu = 0$ und $V = 1$.

$$Z_N := \frac{1}{\sqrt{N}} (X_1 + \dots + X_N)$$

$$\begin{aligned} E(Z_N) &= \frac{1}{\sqrt{N}} E(X_1 + \dots + X_N) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\underbrace{E(X_1)}_{=0} + \dots + \underbrace{E(X_N)}_{=0} \right) \quad \text{(Linearität)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Z_N) &= E((Z_N - E(Z_N))^2) \\ &= E(Z_N^2) - \underbrace{E(Z_N)^2}_{=0} \quad \text{(wie immer)} \\ &= E(Z_N^2) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N E(X_i X_j) \quad \text{(Linearität)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underbrace{E(X_i^2)}_{(!!) = V = 1} + \frac{1}{N} \sum_{i \neq j} \underbrace{E(X_i X_j)}_{(!!) = E(X_i) E(X_j) = 0} \\ &= 1 \quad \text{(Unabh. !)} \end{aligned}$$

Also $E(Z_N) = 0, V(Z_N) = 1$

- Im Limes $N \rightarrow \infty$ ist Z_N nach $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt, also

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_N \leq x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} F_{\mathcal{N}(0,1)}(x)} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

Bew.: $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ sei char. Fkt. von X_i
(dann für alle $i \in \mathbb{N}$!)

Betrachte:

$$\begin{aligned} \phi_{Z_N}(t) &= \mathbb{E}(\exp(itZ_N)) \\ &= \mathbb{E}(\exp(i \frac{t}{\sqrt{N}} (X_1 + \dots + X_N))) \\ &= \prod_{m=1}^N \underbrace{\mathbb{E}(\exp(i \frac{t}{\sqrt{N}} X_m))}_{= \phi_X(t/\sqrt{N})} = \phi_X(t/\sqrt{N})^N \\ &= \phi_X(t/\sqrt{N})^N \end{aligned}$$

Dann folgt die Beh., wenn wir zeigen

$$\phi_X(t/\sqrt{N})^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-t^2/2} = \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= 1 + \underbrace{\frac{it}{\sqrt{N}}}_{=0} - \frac{1}{2} \underbrace{\mathbb{E}(X^2)}_{=1} t^2 + o(t^2) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad (\text{ex. nach Vor.}) \end{aligned}$$

geht schneller gegen 0
als t^2 , für $t \rightarrow 0$

Damit wird:

$$\begin{aligned}\phi_x\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right) &= 1 - \frac{t^2}{2N} + o\left(\frac{t^2}{N}\right) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2N} + o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_x\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right)^N &= \underbrace{\left(1 - \left(\frac{t^2}{2} - N o\left(\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right)^2\right) \frac{1}{N}\right)\right)^N}_{\substack{\sim \\ N \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \textcircled{?}\right)} \\ &\quad \text{(nach Euler)}\end{aligned}$$

↪ sieht schon "fast richtig" aus!

Genauer:

$$o\left(\frac{t^2}{N}\right) = \frac{t^2}{N} \cdot \vartheta_t(N) \quad \text{mit} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \vartheta_t(N) = 0$$

für (jedes!) feste t

- Lemma: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a| \leq 1$ und $|b| \leq 1$ gilt

$$|a^n - b^n| \leq n |a - b|$$

denn: klar für $n=1$, dann induktiv:

$$\begin{aligned}|a^{n+1} - b^{n+1}| &= |a^{n+1} - a^n b + a^n b - b^{n+1}| \\ &\leq \underbrace{|a|^n}_{\leq 1} |a - b| + \underbrace{|a^n - b^n|}_{\leq n |a - b|} \underbrace{|b|}_{\leq 1} \\ &\leq (n+1) |a - b|\end{aligned}$$

□

Damit bekommen wir (für N groß genug):

$$\left| \left(1 + \frac{-t^2/2}{N}\right)^N - \left(1 + \frac{-t^2/2 + t^2 \vartheta_t(N)}{N}\right)^N \right|$$

$$\leq |t^2 \vartheta_t(N)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

und folglich, für jedes feste t :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \phi_X(t/\sqrt{N})^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t^2}{2N}\right)^N = \underline{\underline{e^{-t^2/2}}}$$

↑ Euler!

□

Bemerkungen:

- "gleich verteilt" kann man aufweichen
- Unabhängigkeit kann man abschwächen
- Andere Daten ($\underline{m}$, V) kann man umrechnen
- "Gauß" ist "generisch" zu erwarten
- Zufall und Universalität
- Fehlerverteilung: Summe vieler Einflüsse
- Konvergenz oft "recht schnell" (N klein)

Satz: X, Y unabh., $Z = X + Y$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(Z) = E(X) + E(Y) \\ V(Z) = V(X) + V(Y) \end{cases} \quad (\text{klar!})$$

denn: $E((Z - E(Z))^2) = E((X - E(X))^2) + E((Y - E(Y))^2)$
(nachrechnen - es geht die Unabh. ein!)