neuen Formalismus darstellen. Dabei gilt für $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
|m\rangle &= |e^{imx}\rangle \\
\langle m|n\rangle &= \delta_{m,n} \\
\big(|n\rangle\langle n|\big)^2 &= |n\rangle \underbrace{\langle n|n\rangle}_{=1}\langle n| \;=\; |n\rangle\langle n|\,.
\end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass die Funktion f als Vektor wie folgt aussieht:

$$|f\rangle \;=\; \sum_n c_n|n\rangle.$$

Daraus lässt sich nun die zuvor entwickelte Erweiterung herleiten:

$$\langle m|f\rangle \;=\; \langle m|\sum_n c_n|n\rangle \;=\; \sum_n c_n \underbrace{\langle m|n\rangle}_{=\delta_{m,n}} \;=\; c_m\,,$$

wobei wir die Rechenregeln für Skalarprodukte benutzt haben (s. nächstes Kapitel für eine kurze Wiederholung). Es bleibt aus der Summe nur der Term für $n = m$ bestehen und es ergibt sich für das Skalarprodukt $\langle m|f\rangle$ der Koeffizient c_m. Wird weiter angenommen, dass sich *jede* Funktion f auf diese Weise als (unendliche) Linearkombination darstellen lässt, mit $\{|m\rangle \mid m \in \mathbb{Z}\}$ als Basis (wir kommen später noch darauf zurück), dann folgt

$$|f\rangle \;=\; \underbrace{\Big(\sum_n |n\rangle\langle n|\Big)}_{=\mathbb{1}}|f\rangle \;=\; \sum_n |n\rangle\langle n|f\rangle \;=\; \sum_n \langle n|f\rangle\,|n\rangle \;=\; \sum_n c_n|n\rangle,$$

wobei wir über die passende Konvergenz später mehr sagen werden. Mit dieser Notation wird bei der Einführung von Hilbert-Räumen in Kapitel 3 Einiges systematischer, und das Rechnen etwas einfacher.

2.3 Vollständigkeit und Banach'sches Kontraktionsprinzip

Definition 2.10. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\geq 0\,, \quad \text{mit } d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \\
d(x,y) &= d(y,x) \qquad \text{(Symmetrie)} \\
d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \quad \text{(Dreiecksungleichung).}
\end{aligned}$$

(X, d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

Definition 2.11. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergent ist. Dabei heißt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folge*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \; \exists N \in \mathbb{N} : \; \forall m, n \geq N : \; d(a_n, a_m) < \epsilon\,.$$

Insbesondere ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge, aber die Umkehrung erfordert die Vollständigkeit.

Definition 2.12. Eine Funktion $f : X \to X$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls ein $L \geq 0$ existiert, so dass

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$. Eine *Kontraktion* ist eine Lipschitz-stetige Abbildung mit $L < 1$, und L heißt dabei *Kontraktionskonstante*. Im Folgenden verwenden wir das Symbol ρ für solche Kontraktionskonstanten.

Satz 2.13. *(Banach'scher Fixpunktsatz)*
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ sei eine Kontraktion, mit Kontraktionskonstante $0 \leq \rho < 1$. Dann besitzt die Gleichung $f(x) = x$ genau eine Lösung $x^* \in X$, und jede Iterationsfolge mit $x_0 \in X$ und $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \geq 0$ konvergiert exponentiell schnell gegen x^*.

Beweis. Sei $f(x) = x$ und $f(y) = y$. Dann gilt

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \rho \cdot d(x, y)$$

mit $\rho < 1$ nach Voraussetzung. Das geht nur für $d(x, y) = 0$, also $x = y$. Damit ist gezeigt, dass es höchstens einen Fixpunkt x^* geben kann. Nun muss noch gezeigt werden, dass dieser wirklich existiert.

Sei $x_0 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$ für $n \geq 0$. Mit der Dreiecksungleichung bekommen wir dann für $m \geq 1$:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+m}) &\leq \sum_{\ell=0}^{m-1} d(x_{n+\ell}, x_{n+\ell+1}) \leq d(x_0, x_1) \cdot \rho^n \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{m-1} \rho^\ell}_{=\frac{1-\rho^m}{1-\rho}} \\
&= d(x_0, x_1) \cdot \frac{\rho^n}{1-\rho} \cdot \underbrace{(1-\rho^m)}_{\leq 1} \leq \underbrace{d(x_0, x_1) \cdot \frac{\rho^n}{1-\rho}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \\
&\Rightarrow (x_n) \text{ ist Cauchy-Folge}
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist der metrische Raum vollständig. Also konvergiert die Iterationsfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen einen bestimmten Grenzwert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$, wobei gilt:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^*).$$

Dabei ist der vorletzte Schritt eine Konsequenz der Stetigkeit von f an der Stelle x^*.

Dass die Konvergenz exponentiell schnell erfolgt, ergibt sich sofort aus der Relation $d(x^*, x_n) = \rho^n \cdot d(x^*, x_0)$, die eine Folge der Kontraktionseigenschaft ist. □

Für das Kontraktionsprinzip gibt es sowohl eine a priori als auch eine a posteriori Fehlerabschätzung. An dieser Stelle soll nur der Beweis für die a priori Abschätzung durchgeführt werden. Mit ihrer Hilfe kann man anschließend für einen gegebenen maximalen Abstand zur Lösung die maximale Iterationszahl im Vorfeld bestimmen.

Ergänzung 2.14. Die a priori Abschätzung lautet:

$$d(x^*, x_n) \le \frac{\rho^n}{1-\rho}\, d(x_0, x_1)$$

Beweis. Wir erhalten mit der Dreiecksungleichung:

$$d(x^*, x_n) \;\le\; d(x^*, x_{n+m}) + d(x_{n+m}, x_n) \;\le\; \underbrace{\rho^{n+m}\, d(x^*, x_0)}_{\xrightarrow{m\to\infty} 0} + \underbrace{\frac{\rho^n}{1-\rho}\, d(x_0, x_1)}_{\text{unabhängig von } m} .$$

Es gilt also, mittels geeigneter Wahl von m:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0\colon \quad & d(x^*, x_n) < \;\; \epsilon + \frac{\rho^n}{1-\rho}\, d(x_0, x_1) \\ \overset{\epsilon\searrow 0}{\Longrightarrow} \quad & d(x^*, x_n) \le \;\; \frac{\rho^n}{1-\rho}\, d(x_0, x_1) . \end{aligned}$$

□

Die a posteriori Abschätzung lautet

$$d(x^*, x_n) \;\le\; \frac{\rho}{1-\rho}\, d(x_n, x_{n-1})$$

und gestattet die Abschätzung des Abstandes vom Fixpunkt aus den beiden letzten Iterationsschritten. Sie folgt aus einer kleinen Modifikation im Beweis von Satz 2.13.

Wir wollen uns nun zwei Anwendungen ansehen.

Beispiel 2.15. Zu berechnen sei die Lösung der transzendenten Gleichung $e^{-\frac{x}{2}} - x = 0$ auf drei Nachkommastellen genau. Weiter sei der Startwert $x_0 = 1$ gegeben.

Zunächst muss eine Fixpunktgleichung aufgestellt werden. Hier geht $e^{-x/2} = x$. Damit lautet die Iteration $x_0 = 1$ mit

$$x_{n+1} \;=\; e^{-\frac{x_n}{2}} \quad \text{für } n \ge 0 .$$

Anschließend kann die Iteration beginnend mit dem Startwert durchgeführt werden, bis eine Genauigkeit auf 3 Nachkommastellen erreicht ist. Dies ist etwa ab der 8. Iteration der Fall, wie durch die a priori Abschätzung bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-\frac{x_0}{2}} \approx 0,606531 \\ x_2 &= e^{-\frac{x_1}{2}} \approx 0,738403 \\ &\vdots \\ x_8 &\approx 0,703533 \\ x_9 &\approx 0,703444 \\ x_{10} &\approx 0,703475\,. \end{aligned}$$

Beispiel 2.16. (Cantor-Menge)
Wir betrachten den metrischer Raum (X, d), wobei

$$X = \{\text{Menge der nicht-leeren kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}\}$$

und d die Distanz zwischen zwei Mengen sei. Gut geeignet ist dafür die Hausdorff-Metrik, da (X, d) dann vollständig ist.

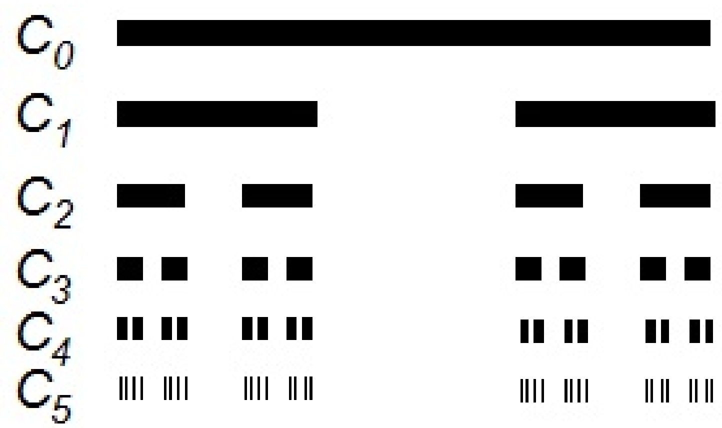

Abbildung 5: Skizze für das Intervall $C_0 = [0, 1]$ und anschließende Cantor-Iterationen.

Weiter seien zwei Funktionen

$$f_0(x) = \frac{1}{3}x \quad \text{und} \quad f_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

und eine kompakte Teilmenge $C_0 \in X$ als Startmenge gegeben. Die Menge $\mathcal{C}$, welche sich als Limes der Iterationsfolge

$$C_{n+1} = f_0(C_n) \cup f_1(C_n) \quad \text{für } n \geq 0$$

ergibt, heißt *Cantor-Menge*. Die Iteration ist eine Kontraktion bzgl. der Hausdorff-Metrik, mit Kontraktionskonstante $\frac{1}{3}$. Daher ist $\mathcal{C}$ eine wohldefinierte kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$

(tatsächlich mit $\mathcal{C} \subset [0,1]$). Sie besitzt überabzählbar viele Elemente, hat aber dennoch Maß 0. Details hierzu findet man in den meisten Lehrbüchern der Analysis.

In ähnlicher Weise kann man auch andere Fraktale beschreiben, Abb. 6 zeigt dazu eine Illustration für das Beispiel des Sierpinski-Frakals in der Ebene.

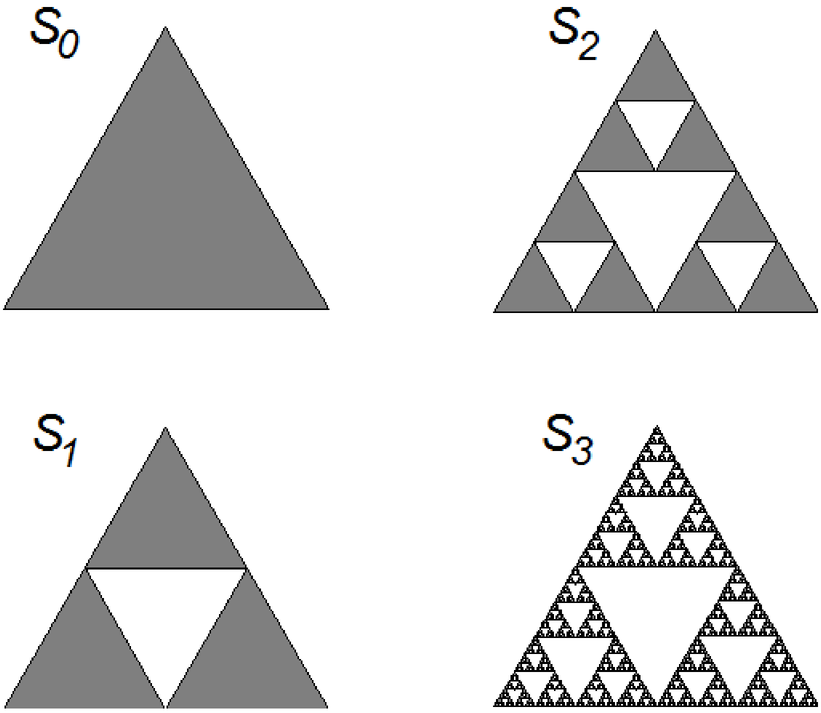

Abbildung 6: Skizze der ersten Iterationen zur Sierpinski-Menge. Sie beschreibt wie die Cantor-Menge ein Fraktal, welches im Grenzwert das Maß 0 hat, aber dennoch überabzählbar viele Punkte enthält.