3 Hilbert-Räume und Fourier-Reihen

3.1 Allgemeine Eigenschaften

Zunächst benötigt man die Definition einer *Norm*, da diese ein wichtiger Bestandteil der hier behandelten Vektorräume sein wird.

Definition 3.1. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm*, wenn für beliebige Vektoren u, v und Zahlen α aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ folgende Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned} \|v\| &\geq 0\,, \quad \text{mit } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \\ \|\alpha v\| &= |\alpha|\|v\| \\ \|v+u\| &\leq \|v\| + \|u\| \end{aligned}$$

Mit $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ wird der $\mathbb{C}$-Vektorraum der auf $[-\pi,\pi]$ quadratintegrablen Funktionen bezeichnet, d.h. $\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x)^2\right| \mathrm{d}x$ existiert im Sinne von Lebesgue. Dabei benutzen wir nun auch den Begriff des Skalarproduktes.

Definition 3.2. Sei V ein komplexer Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot|\cdot\rangle: V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *Skalarprodukt* auf V, wenn folgende Eigenschaften für beliebige Elemente $f, g, h \in V$ und Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$ erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \langle f|g+h\rangle &= \langle f|g\rangle + \langle f|h\rangle \\ \langle f|\alpha g\rangle &= \alpha\langle f|g\rangle \\ \langle g|f\rangle &= \overline{\langle f|g\rangle} \quad \text{(komplex konjugiert)} \\ \langle f|f\rangle &\geq 0\,, \quad \text{mit } \langle f|f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0\,. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\langle\alpha f|g\rangle = \overline{\alpha}\,\langle f|g\rangle$ eine Folge der geforderten Eigenschaften ist. Ist $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt, so definiert $\|f\| := \sqrt{\langle f|f\rangle}$ eine Norm auf V im Sinne von Definition 3.1. Dabei gilt dann die *Schwarz'sche Ungleichung*

$$|\langle f|g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|\,, \tag{23}$$

die eine der wichtigen Ungleichungen der Mathematik ist.

Mit $\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x$ ist auf dem Vektorraum $L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ ein Skalarprodukt definiert (siehe auch [3], Bsp. 18.5.). Bzgl. der zugehörigen Norm ist dieser Raum dann zudem vollständig gemäß Def. 2.11, also alle Cauchy-Folgen konvergieren. Vollständige $\mathbb{C}$-Vektorräume mit einem Skalarprodukt, das die Norm induziert, nennt man auch *Hilbert-Räume*.

Satz 3.3. *Jede 2π-periodische, stetige Funktion f lässt sich als konvergente Fourier-Reihe darstellen,*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{inx} \quad \textit{mit} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, e^{-ins}\, \mathrm{d}s\,,$$

wobei es sich um Konvergenz im Mittel handelt, also Konvergenz bezüglich $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot|\cdot\rangle}$.

Bemerkung 3.4. Dies ist ein sehr schöner Konvergenzbegriff, welcher systematischer als punktweise Konvergenz und effizienter als gleichmäßige Konvergenz ist. Zu beachten ist jedoch, dass nicht überall punktweise Konvergenz vorliegen muss.

Jetzt zeigt sich noch ein Schönheitsfehler: Bezüglich der Norm $\|.\|$ ist der Raum der stetigen Funktionen $C^0([0, 2\pi], \langle\cdot|\cdot\rangle)$ nicht vollständig. Das heißt, dass der Limes einer im Mittel konvergenten Folge von Funktionen aus $C^0([0, 2\pi], \langle\cdot|\cdot\rangle)$ selbst nicht wieder in diesem Raum liegen muss. Man betrachte z.B. eine Funktionen-Folge f_n, welche wie folgt aussieht:

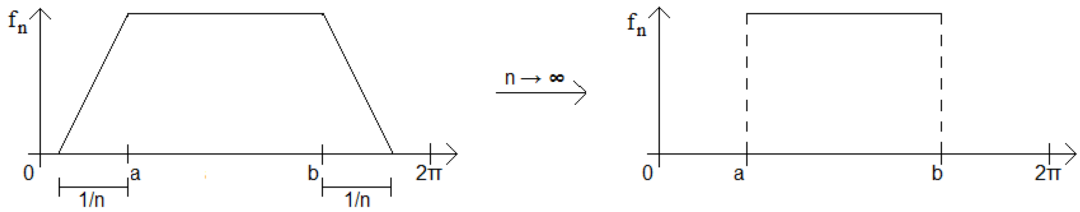

Abbildung 7: Skizze zum Schönheitsfehler der Unvollständigkeit.

Dann ergibt sich, dass der Grenzwert für $n \to \infty$ nicht stetig ist. Eine elegante Lösung dieses Problems, die zugleich eine wichtige Klasse vollständiger Räume liefert, basiert auf dem Integralbegriff von *Lebesgue*. Die übliche Betrachtungsweise eines Integrals nach

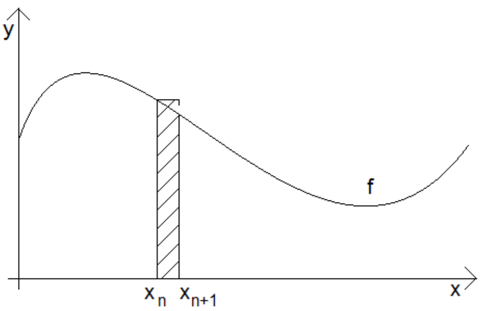

Abbildung 8: Skizze zum klassischen Riemann-Integral. Approximation von f durch Rechtecke entlang der x-Achse.

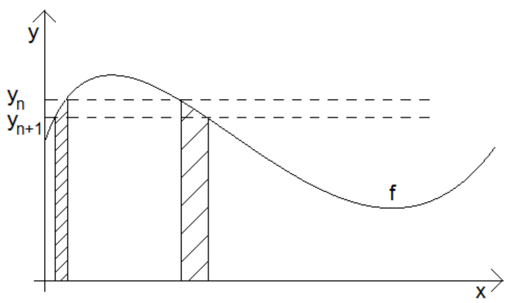

Abbildung 9: Skizze zum Lebesgue-Integral. Approximation von f durch Rechtecke mit Auswahl entlang der y-Achse.

Riemann ist in Abbildung 8 zu sehen. Es werden sehr schmale Rechtecke zwischen zwei nah aneinander liegenden x-Werten mit Hilfe der entsprechenden Funktionswerte aufsummiert. Für verschwindend kleine Rechtecke erhält man das Integral der Funktion. Nach Lebesgue wird diese Technik zwar beibehalten, allerdings wird zwischen x- und y-Werten getauscht. Es wird also die Breite der Rechtecke anhand der Funktionswerte vorgegeben und mittels aller zugehörigen x-Werte ggfs. mehrere Rechtecke pro Intervall berechnet. Damit ist der Raum

$$L^2([0,2\pi],\langle\cdot|\cdot\rangle) \;=\; \left\{ f \,\middle|\, \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x \text{ ex. im Lebesgue-Sinne} \right\}$$

vollständig. Aber auch hier gibt es noch eine (kleine) Einschränkung. Gegeben sei die Funktion f (dargestellt in Abbildung 10)

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \in [0,2\pi] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst auf } [0,2\pi]. \end{cases}$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, stimmt f fast überall (im Sinne der Lebesgue-Theorie) mit $g \equiv 0$ überein, und die beiden Funktionen werden als gleich angesehen.

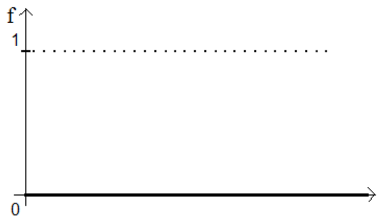

Abbildung 10: Skizze der Funktion f.

Dies spielt in der Praxis allerdings keine Rolle, da nie an einzelnen Punkten, sondern vielmehr auf sehr kleinen Intervallen mittelnd gemessen werden. Dies liegt an der endlichen Auflösung der Messgeräte.

Die Vektorräume, welche im Folgenden betrachtet werden, sehen folgendermaßen aus.

$$L^p([a,b],\mathbb{C}) \;:=\; \left\{ f\colon\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \,\middle|\, \int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x \text{ ex. im Lebesgue-Sinne} \right\}$$

für $1 \le p < \infty$, und

$$L^\infty([a,b],\mathbb{C}) \;:=\; \left\{ f\colon\, [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \,\middle|\, \sup_x |f(x)| < \infty \right\}.$$

Dies sind stets Banach-Räume. Einige in diesem Skript besprochene Eigenschaften gelten auch für $1 \le p < \infty$, dennoch ist nur für $p = 2$ der entsprechende Raum ein Hilbert-Raum. Hier ist die Norm durch das Skalarprodukt gegeben.

In einem Vektorraum ist eine Basis in der Regel sehr nützlich. In einem Hilbert-Raum ist es besonders hilfreich, eine Orthonormal-Basis zu haben.

Definition 3.5. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Eine Menge an Vektoren $\{b_i \mid i \in I\}$ mit endlicher oder abzählbarer Indexmenge I heißt *Orthonormalsystem* (ONS), falls

$$\langle b_i \,|\, b_j \rangle \;=\; \delta_{ij}$$

für alle $i, j \in I$. Ein ONS heißt *maximal*, falls einzig das Nullelement orthogonal zu allen b_i des ONS ist.

Ist V ein Hilbert-Raum, so ist ein maximales ONS eine *Basis*, es kann also jedes Element von V als (konvergente) Linearkombination in den Elementen des ONS dargestellt werden. Insbesondere ist ein ONS eine Basis, wenn V endliche Dimension hat.

3.2 Die Gauß'sche Approximationsaufgabe

Es sei eine Funktion f gegeben, die Element eines Hilbert-Raums sei. Außerdem sei $\{e_1, ..., e_n\}$ ein ONS, aber nicht notwendig maximal. Insbesondere verlangen wir an dieser Stelle nicht, dass es sich um eine Basis handelt. Wir wollen nun $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ so bestimmen, dass

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \overset{(!)}{=} \min .$$

Anders ausgedrückt: Wie kann man f also mit endlich vielen Termen am besten approximieren? Dies nennt man die *Gauß'sche Approximationsaufgabe*. Mit Hilfe der Vorarbeit zu Vektorräumen lässt sich diese Frage wie folgt beantworten.

Satz 3.6. *Die Gauß'sche Approximationsaufgabe wird eindeutig gelöst duch*

$$\alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle , \quad \textit{für } 1 \leq \ell \leq n ,$$

und $f - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell$ steht senkrecht auf e_i für alle $1 \leq i \leq n$. Dabei gilt die Bessel'sche Ungleichung

$$\sum_{\ell=1}^{n} \left| \langle e_\ell | f \rangle \right|^2 \leq \| f \|^2 .$$

Beweis. Wir beginnen mit einer einfachen Rechnung:

$$\begin{aligned}
0 \quad \leq \quad & \left\| f - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell \right\|^2 = \left\langle f - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell \,\middle|\, f - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell e_\ell \right\rangle \\
= \quad & \langle f | f \rangle - \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \langle f | e_\ell \rangle - \sum_{\ell=1}^{n} \overline{\alpha_\ell} \langle e_\ell | f \rangle + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{\ell'=1}^{n} \overline{\alpha_\ell} \alpha_{\ell'} \langle e_\ell | e_{\ell'} \rangle}_{= \sum_{\ell=1}^{n} |\alpha_\ell|^2} \\
\overset{\text{quadr. Erg.}}{=} \quad & \langle f | f \rangle + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \left| \langle e_\ell | f \rangle - \alpha_\ell \right|^2}_{\geq 0, \text{ einziger variabler Term}} - \sum_{\ell=1}^{n} \left| \langle e_\ell | f \rangle \right|^2 .
\end{aligned}$$

Der Abstand wird also genau dann minimal, wenn $\alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle$ für alle $1 \leq \ell \leq n$ gilt. Damit folgt dann auch sofort die Bessel'sche Ungleichung.
Ist $z = f - \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell | f \rangle \, e_\ell$, so gilt

$$\langle e_m | z \rangle = \langle e_m | f \rangle - \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell | f \rangle \underbrace{\langle e_m | e_\ell \rangle}_{= \delta_{m,\ell}} = \langle e_m | f \rangle - \langle e_m | f \rangle = 0 .$$

Damit ist auch die zweite Behauptung gezeigt. □