Es zeigt sich also, dass die beste Approximation an die Funktion f gegeben ist durch die Teilsummen der Fourier-Reihe, wobei mit ‘beste Approximation’ der Abstand bezüglich der L^2 -Norm gemeint ist.

Folgerung 3.7. *Es gilt die Bessel’sche Gleichung:*

$$\left\| f - \sum_{\ell=1}^n \langle e_\ell | f \rangle e_\ell \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{\ell=1}^n |\langle e_\ell | f \rangle|^2$$

wie sich direkt aus der Rechnung im obigen Beweis ergibt.

Nun können wir eine Erweiterung auf ein abzählbares ONS wie folgt formulieren.

Satz 3.8. *Sei V ein unendlich-dimensionaler komplexer Vektorraum mit Skalarprodukt, und sei $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein ONS in V . Dann gilt:*

1. $\sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell$ ist Cauchy-Folge $\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} |\alpha_\ell|^2$ konvergiert;
2. $f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell \Rightarrow \alpha_\ell = \langle e_\ell | f \rangle$ für alle ℓ , und es liegt unbedingte Konvergenz vor;
3. $\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell = f \Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} |\langle e_\ell | f \rangle|^2 = \|f\|^2$ (Parseval’sche Gleichung).

Beweis. Die 1. Behauptung folgt aus einer Rechnung, mit $1 \leq m \leq n$:

$$\left\| \sum_{\ell=m}^n \alpha_\ell e_\ell \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=m}^n \alpha_k e_k \left| \sum_{\ell=m}^n \alpha_\ell e_\ell \right. \right\rangle = \sum_{k,\ell=1}^n \overline{\alpha_k} \alpha_\ell \underbrace{\langle e_k | e_\ell \rangle}_{\delta_{k,\ell}} = \sum_{\ell=m}^n |\alpha_\ell|^2.$$

Für die 2. Behauptung: Sei $f_n = \sum_{\ell=1}^n \alpha_\ell e_\ell$ und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|$. Dann ist

$$|\langle e_k | f_n \rangle - \langle e_k | f \rangle| = |\langle e_k | f_n - f \rangle| \leq \underbrace{\|e_k\|}_{=1} \cdot \|f_n - f\| = \underbrace{\|f_n - f\|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Da aber $\langle e_k | f_n \rangle = \alpha_k$ für alle $n \geq k$ nach Satz 3.6, folgt die Formel für den Koeffizienten aus der Stetigkeit der Linearform $g \mapsto \langle e_k | g \rangle$. Die unbedingte Konvergenz stellen wir einen Moment zurück.

Die 3. Behauptung folgt nun sofort aus der Bessel’schen Gleichung.

Somit bleibt die ‘Umordnungsresistenz’ von der 2. Behauptung zu zeigen. Wir haben bisher gezeigt:

$$f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \alpha_\ell e_\ell \Rightarrow f = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{|\langle e_\ell | f \rangle|^2}_{\geq 0} \text{ konvergiert absolut.}$$

Daher können wir in der letzten Summe beliebig umordnen (was einer Umnummerierung der Elemente unseres ONS entspricht), ohne den Grenzwert zu ändern. Aus der 3. Behauptung, die wir ja schon bewiesen haben, folgt dann aber, dass $\sum_{\ell=1}^{\infty} \langle e_\ell | f \rangle e_\ell$ auch bei beliebiger Umordnung stets gegen f konvergiert. $\square$

3.3 Fourier-Reihen: Ergänzungen

Im Hinblick auf die weitere Entwicklung wollen wir eine neue Notation einführen.

Definition 3.9. Betrachte eine Funktion $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit periodischer Fortsetzung. Die Koeffizienten

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (24)$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ heißen die *Fourier-Koeffizienten* von f .

Bemerkung 3.10. Wir halten kurz einige Eigenschaften fest:

- Die Fourier-Koeffizienten aus (24) sind wohl definiert wegen

$$|e^{-inx} f(x)| = |f(x)|,$$

weswegen auch $x \mapsto e^{-inx} f(x)$ eine L^1 -Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ist.

- Die Fourier-Koeffizienten von f sind beschränkt, denn

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

- Die Abbildung $f \mapsto \widehat{f}$ ist linear, denn

$$\widehat{(\alpha f + \beta g)}(n) = \alpha \widehat{f}(n) + \beta \widehat{g}(n)$$

gilt für alle $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Satz 3.11. (*Eindeutigkeitssatz*)

Gegeben seien zwei Funktionen $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Dann folgt $f = g$ in L^1 . Dies bedeutet, dass $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in [-\pi, \pi]$ gilt.

Für die in Gl. (24) definierten Fourier-Koeffizienten gibt es allerdings noch ein Problem. Die Fourier-Reihe zu den Koeffizienten $\widehat{f}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \widehat{f}(n)$$

muss nämlich nicht konvergieren! Nach Kolmogorov (1926) existiert eine Funktion $f \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ dessen Fourier-Reihe nirgends konvergiert. Das ändert sich, wenn wir $f \in L^p([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ mit $p > 1$ betrachten. Zunächst gilt:

Satz 3.12. (*Carleson, 1966*)

Die Fourier-Reihe einer periodisch fortgesetzten L^2 -Funktion ist fast überall punktweise konvergent.

Bemerkung 3.13. Der Satz von Carleson klärt eine Vermutung von Lusin (1915). Hunt (1968) zeigte dann, dass sich dies auf Funktionen $f \in L^p([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ für $1 < p < \infty$ erweitern lässt.

Dabei ist der Begriff ‘fast überall auf $[a, b]$ ’ mathematisch präzise. Es bedeutet konkret, dass die Aussage überall außer auf einer Teilmenge vom Maß 0 gilt. Man beachte, dass nicht nur abzählbare Mengen vom Maß 0 sind, es gibt auch andere. Eine überabzählbare Ausnahmemenge ist z.B. die Cantor-Menge aus Beispiel 2.16.

Die Idee dieses Begriffs kann man sich auch mittels der Wahrscheinlichkeitstheorie näher bringen. Es gibt Ereignisse mit einer Wahrscheinlichkeit von 1, wie z.B. das Werfen von Kopf bei einem unendlich oft wiederholten Münzwurf. Man spricht davon, dass ‘fast immer’ irgendwann Kopf fallen wird.

Nun kommen wir zu einem sehr wichtigen Konzept.

Definition 3.14. Es seien $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Die Funktion $f * g$, die durch

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

definiert ist, heißt Faltung von f und g (dabei sind f, g für die Definition des Integrals nie periodisch fortgesetzt gedacht).

Lemma 3.15. *Es seien $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$. Dann existiert $(f * g)(t)$ für fast alle $t \in [-\pi, \pi]$, man hat $f * g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, und es gelten folgende Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} f * g &= g * f && \text{(kommutativ)} \\ (f * g) * h &= f * (g * h) && \text{(assoziativ)} \\ f * (\alpha g + \beta h) &= \alpha(f * g) + \beta(f * h) && \text{(linear)} \end{aligned}$$

für beliebige $f, g, h \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Beweis. siehe Übung. □

Die Faltung hat starke Konsequenzen:

Satz 3.16. (*Faltungssatz*)

Für beliebige $f, g \in L^1([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ gilt $\widehat{(f * g)}(n) = \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Dies folgt wieder aus einer kleinen Rechnung:

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \widehat{(f * g)}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-in(t-\tau)} g(t - \tau) dt}_{= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int'} g(t') dt' = 2\pi \widehat{g}(n)} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau \\ &= 2\pi \widehat{g}(n) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\tau} f(\tau) d\tau = 4\pi^2 \widehat{f}(n) \widehat{g}(n). \end{aligned}$$

Dabei wird im vorletzten Schritt die 2π -Periodizität von g verwendet, um nach einer Verschiebung um τ den Funktionswert an $t' \in [-\pi, \pi]$ zu berechnen. □

Beispiel 3.17. Ein einfaches Beispiel ist die Faltung der charakteristischen Funktion einer Menge mit sich selbst. Gegeben sei dazu

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Faltung $f * f$ kann nun in mehrere Bereiche aufgeteilt werden, wobei der Wert zwischen $-\pi \leq t \leq 0$ zunimmt und im Bereich $0 \leq t \leq \pi$ wieder abfällt. Das Ergebnis lautet:

$$(f * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 0, & x \leq -\pi, \\ \pi + x, & -\pi < x \leq 0, \\ \pi - x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \pi < x. \end{cases}$$

Die zugehörige Rechnung sollte man selber einmal durchführen, um sich mit der Faltung vertraut zu machen. Der Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ kommt von der oben gewählten Definition der Faltung.